TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

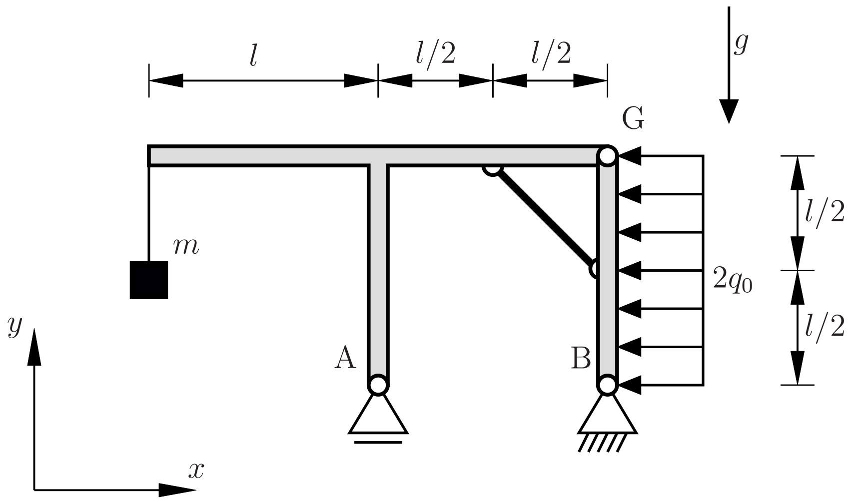
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

a)
Das folgende System besteht aus einem masselosen Balken, welcher über ein Gelenk sowie einen Stab mit einem masselosen Rahmen verbunden ist. Des Weiteren wirkt eine konstante Streckenlast der Größe q_0 auf den Balken. Außerdem ist über ein Seil eine Masse an dem Rahmen angebracht. Das System befindet sich im Schwerefeld.



Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B . Tragen Sie dabei die unbekannten Lagergrößen in positiver Koordinatenrichtung an. (**1,5 Punkte**)

$$A = q_0 l + 2mg, \quad B_x = 2q_0 l, \quad B_y = -q_0 l - mg$$

Bestimmen Sie die Beträge der Gelenkkräfte in G in x- und y-Richtung sowie die Stabkraft S. Dabei gilt die Konvention positiver Zugstäbe. (**1,5 Punkte**)

$$S = 2\sqrt{2} q_0 l, \quad |G_x| = 2q_0 l, \quad |G_y| = |q_0 l - mg|$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

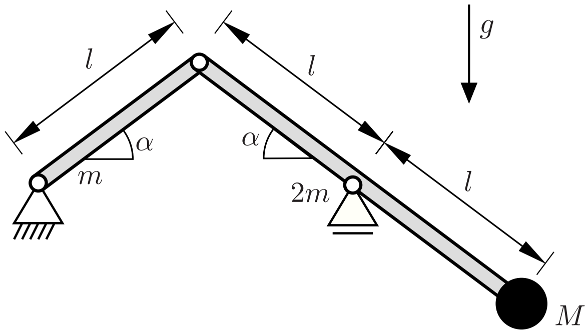
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

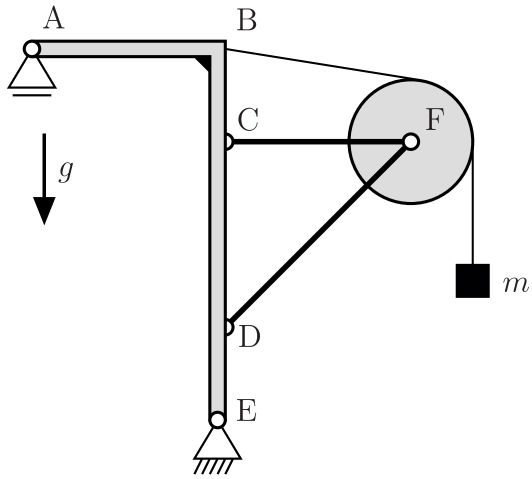
b)
Das nebenstehende System besteht aus zwei Balken mit den Massen m und $2m$ mit homogener Dichteverteilung. Die Balken sind jeweils um einen Winkel α geneigt. Am rechten Balken ist außerdem eine Masse M angebracht. Das gesamte System befindet sich in einem Schwerefeld.



Für welche Masse M, abhängig von m und α, befindet sich das System im Gleichgewicht?
(**2,0 Punkte**)

$M = \frac{1}{2}m$

c)
Das folgende System besteht aus einem Rahmen, zwei Stäben, einer Rolle und einem Seil, welches die Masse m trägt. Alle Komponenten des Systems außer der Masse m sind als masselos anzusehen. Das System befindet sich im Schwerefeld.



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

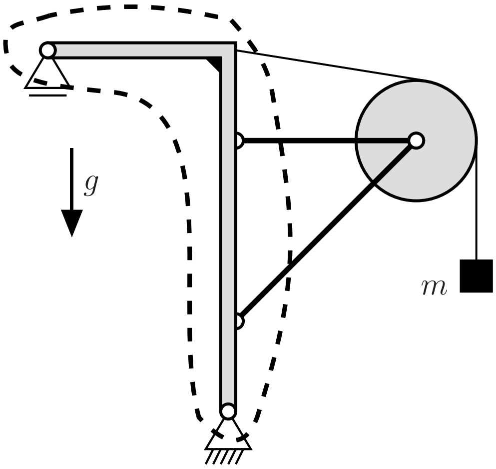
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

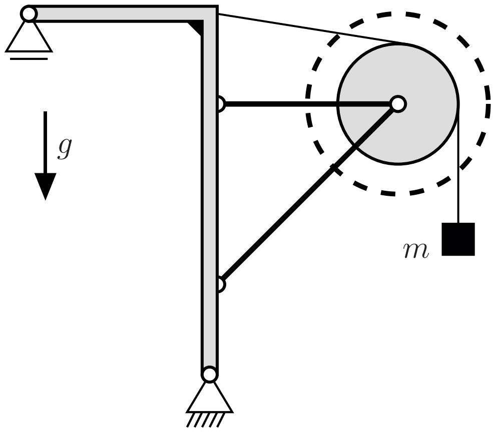
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

Die inneren und äußeren Reaktionskräfte sollen durch die folgenden zwei Freischnitte sichtbar gemacht werden:

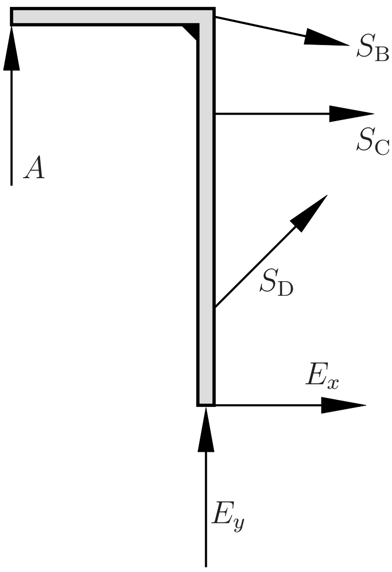


Schnitt 1

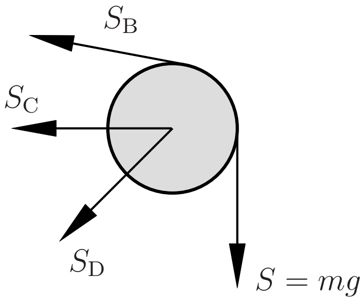


Schnitt 2

Zeichnen Sie die vollständigen Freikörperbilder zu den zwei gekennzeichneten Freischnitten. Wählen Sie eindeutige Bezeichnungen für die angetragenen Reaktionskräfte. (**2,0 Punkte**)



Schnitt 1



Schnitt 2

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

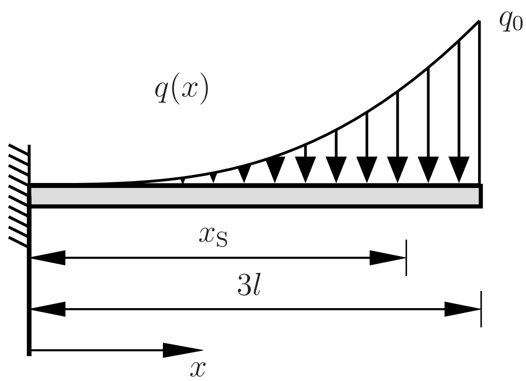
Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

d)

Im Folgenden soll die Streckenlast $q(x)$ der Form

$$q(x) = q_0 \left(\frac{x}{3l}\right)^3$$

auf einem eingespannten Balken der Länge $3l$ betrachtet werden. Dabei kann das Lager maximal ein Biegemoment von $M_{\max}$ aufnehmen.



Für welches q_0 wird das maximale Biegemoment des Lagers **nicht** überschritten? **(3,0 Punkte)**

$$q_0 \leq \frac{5}{9} \frac{M_{\max}}{l^2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

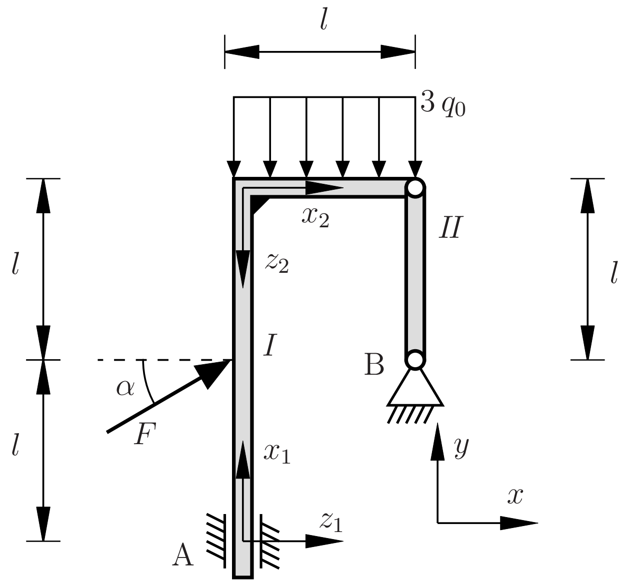
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)
Das nebenstehende System besteht aus dem masselosen Rahmen I und dem masselosen Balken II, welche gelenkig miteinander verbunden sind. Rahmen I ist im oberen Bereich mit einer konstanten Streckenlast der Größe $3\,q_0$ belastet. Mittig am Rahmen I greift die Kraft $F = q_0\,l$ unter dem Winkel α an. Die Auflagerkräfte bezüglich des globalen x-y-Koordinatensystems können als bekannt angenommen werden.



Geben Sie den Querkraft- sowie den Momentenverlauf für Rahmen I an. Verwenden Sie dazu die vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme. **(5,0 Punkte)**

Bereich: $0 \leq x_1 \leq l$

$Q_I(x_1) = -A_x$

$M_I(x_1) = -M_A - A_x\,x_1$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Bereich: $l \leq x_1 \leq 2\,l$

$$Q_{II}(x_1) = -A_x - F\,\cos(\alpha)$$

$$M_{II}(x_1) = -M_A - A_x\,x_1 - F\,[x_1 - l]\,\cos(\alpha)$$

Bereich: $0 \leq x_2 \leq l$

$$Q_{III}(x_2) = -B_y + [l - x_2]\,3\,q_0$$

$$M_{III}(x_2) = B_y\,[l - x_2] - \tfrac{3}{2}\,[l - x_2]^2\,q_0$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

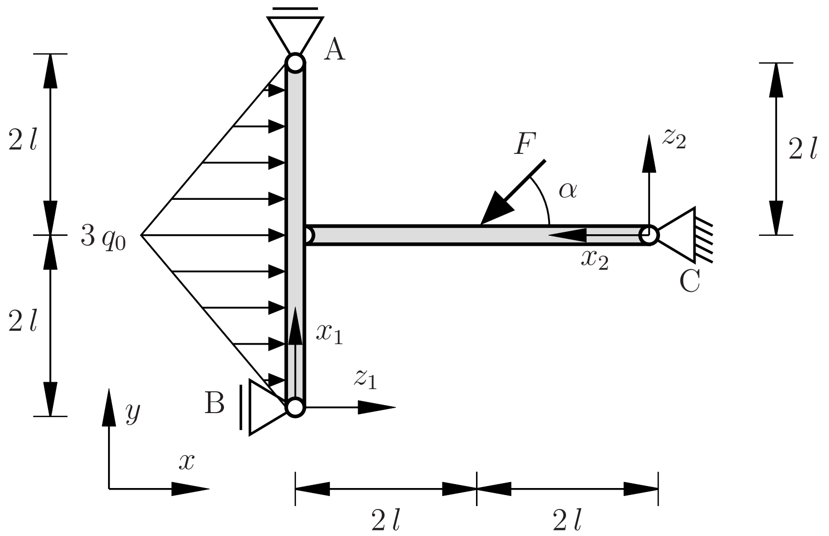
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

b)
Gegeben sei das nachfolgend abgebildete System. Ein durch eine dreiecksförmige Streckenlast mit Spitzenlast $3\,q_0$ belasteter Balken ist gelenkig mit einem Rahmen verbunden. Auf den Rahmen wirkt die Einzelkraft $F = \sqrt{2}\,q_0\,l$ im Winkel $\alpha = 45°$.



Die Auflagerreaktionen bezüglich des x-y-Koordinatensystems sind durch

$$A_y = \frac{1}{2}\,q_0\,l\,, \qquad B_x = 0\,, \qquad C_y = \frac{1}{2}\,q_0\,l\,, \qquad C_x = -5\,q_0\,l$$

gegeben.

Zeichnen Sie für das oben stehende System den gesamten Querkraft- und Biegemomentenverlauf qualitativ in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie an den Eckpunkten die charakteristischen Werte an. Geben Sie außerdem die Polynomgrade der Teilfunktionen an. **(5,0 Punkte)**

TU Dortmund

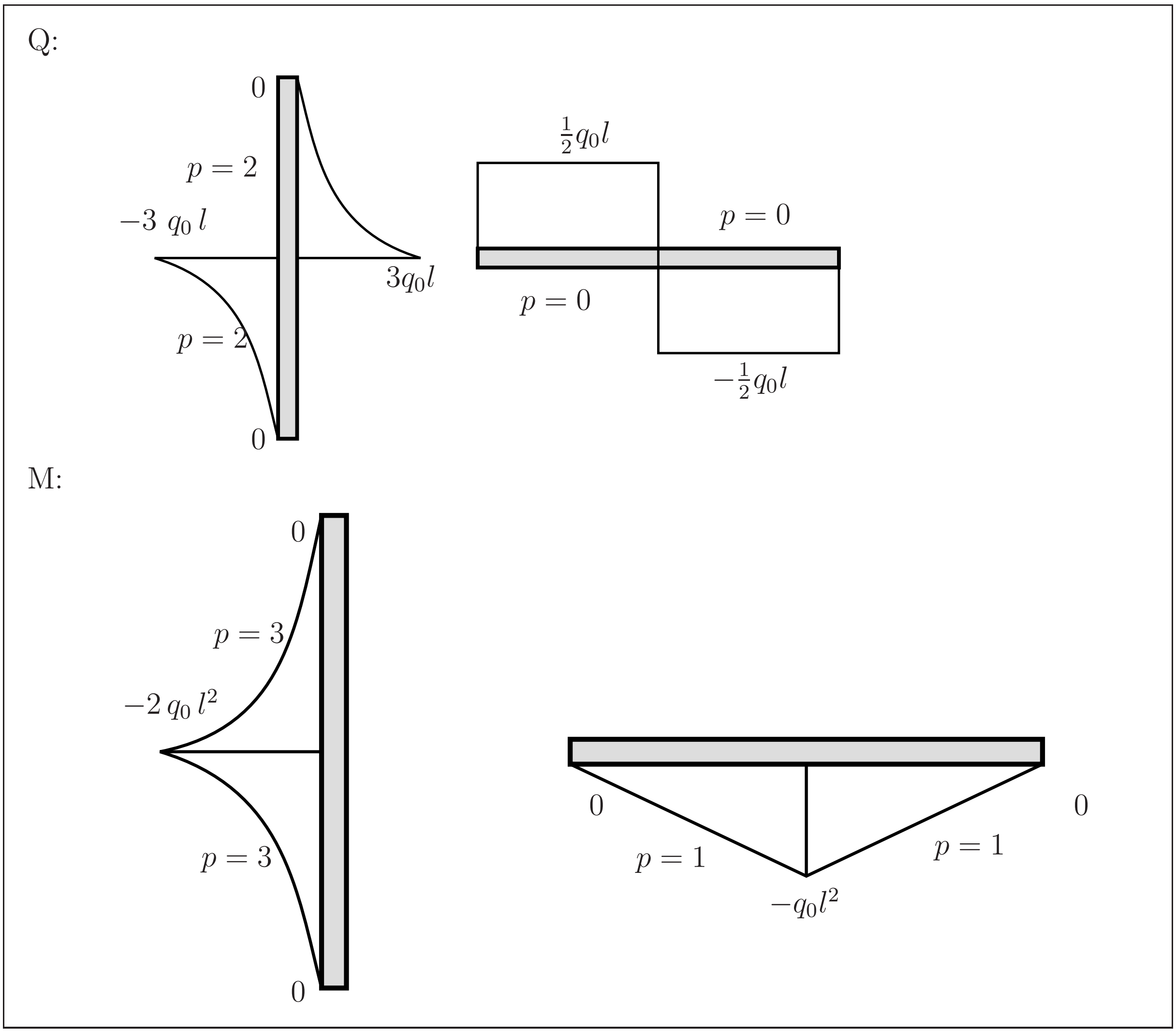
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

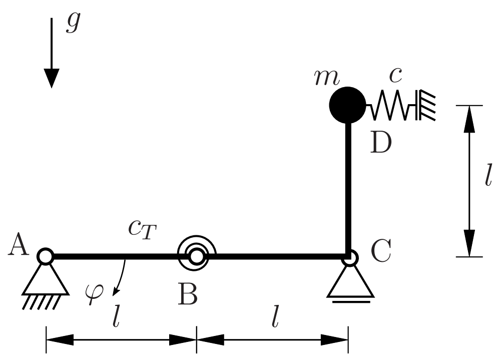
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 5)

a)
Ein masseloser Stab und ein masseloser Rahmen sind wie dargestellt in den Punkten A und C gelagert und im Punkt B durch ein Gelenk miteinander verbunden. Zusätzlich ist am Punkt B eine Drehfeder (Drehfedersteifigkeit c_T) angebracht. Des Weiteren befindet sich im Punkt D eine Punktmasse (Masse m) sowie eine Zug-Druck-Feder (Federsteifigkeit c). Beide Federn sind in der dargestellten Lage ungespannt.



Bestimmen Sie das Gesamtpotential $\Pi(\varphi)$ in Abhängigkeit des Freiheitsgrades φ. Vereinfachen Sie dabei Ihre Ergebnisse **nicht**. **(1,5 Punkte)**

$$\Pi(\varphi) = 2\,c_T\,\varphi^2 + m\,g\,l\,\cos(\varphi) + \frac{1}{2}\,c\,\left[2\,\cos(\varphi)\,l - \sin(\varphi)\,l - 2\,l\right]^2$$

Bestimmen Sie die Drehfedersteifigkeit c_T so, dass für die Federsteifigkeit $c = 0$ die Lage $\varphi = \pi/3$ eine Gleichgewichtslage ist. **(1,0 Punkte)**

$$c_T = \frac{3\sqrt{3}}{8}\,\frac{m\,g\,l}{\pi}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

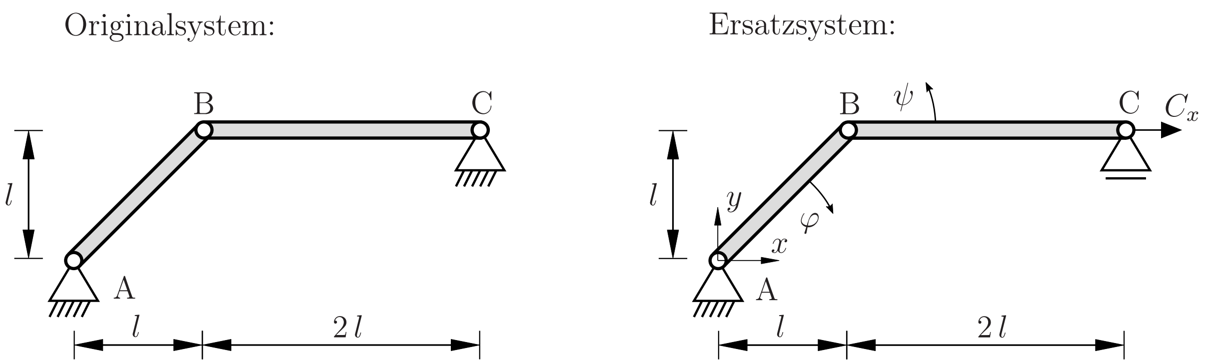
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Bestimmen Sie die Art der Gleichgewichtslage $\varphi = \pi/3$. Es gilt weiterhin, dass die Federsteifigkeit $c = 0$ enstspricht. **(1,0 Punkte)**

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{2}\, m\, g\, l \left[\frac{3\sqrt{3}}{\pi} - 1\right] > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{stabil}$$

b)
Die dargestellte Konstruktion besteht aus zwei masselosen Balken. Gemäß dem Prinzip der virtuellen Arbeit wurde das Festlager in Punkt C des Originalsystems (links) im Ersatzsystem (rechts) durch ein Loslager sowie eine Kraft C_x ersetzt.



Geben Sie die Ortsvektoren der Punkte B und C gemäß des eingezeichneten Koordinatensystems in Abhängigkeit der Freiheitsgrade φ und ψ an. **(1,5 Punkte)**

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{B} = [\cos(\varphi)\, l + \sin(\varphi)\, l]\ \boldsymbol{e}_x + [\cos(\varphi)\, l - \sin(\varphi)\, l]\ \boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{C} = [\cos(\varphi)\, l + \sin(\varphi)\, l + 2\, \cos(\psi)\, l]\ \boldsymbol{e}_x$$

$$+ [\cos(\varphi)\, l - \sin(\varphi)\, l + 2\, \sin(\psi)\, l]\ \boldsymbol{e}_y$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 5)

Bestimmen Sie die virtuelle Verrückung $\delta\boldsymbol{r}_{\mathrm{C}}$ des Punktes C in Abhängigkeit der Freiheitsgrade φ und ψ. **(1,0 Punkte)**

$$\delta\boldsymbol{r}_{\mathrm{C}} = [-\sin(\varphi)\, l\, \delta\varphi + \cos(\varphi)\, l\, \delta\varphi - 2\,\sin(\psi)\, l\, \delta\psi]\ \boldsymbol{e}_x$$

$$+ [-\sin(\varphi)\, l\, \delta\varphi - \cos(\varphi)\, l\, \delta\varphi + 2\,\cos(\psi)\, l\, \delta\psi]\ \boldsymbol{e}_y$$

Bestimmen Sie für die dargestellte Lage ($\varphi = 0$, $\psi = 0$) die virtuelle Verdrehung $\delta\psi$ in Abhängigkeit von $\delta\varphi$. Tragen Sie dazu die wichtigsten Zwischenschritte ebenfalls in das nachfolgende Kästchen ein. **(1,5 Punkte)**

$$\delta\boldsymbol{r}_{\mathrm{C,y}}(\varphi = 0,\, \psi = 0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -l\,\delta\varphi + 2\,l\,\delta\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta\psi = \frac{1}{2}\,\delta\varphi$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

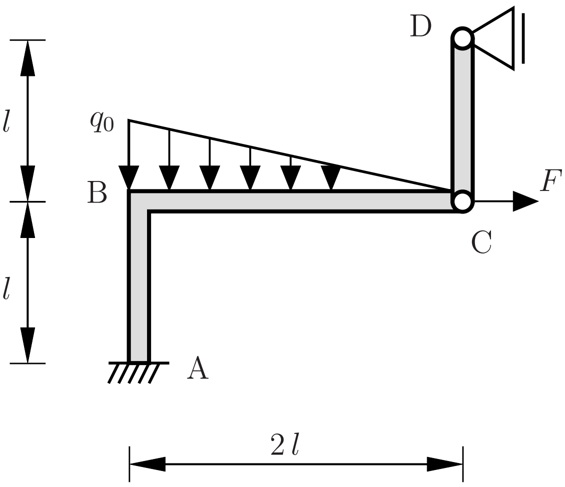
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

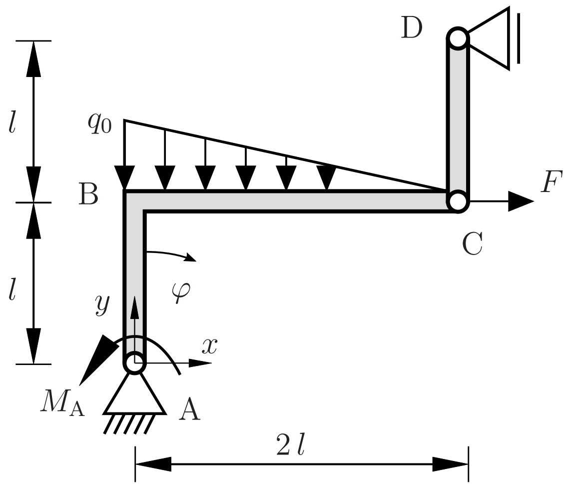
Aufgabe 3

c)
Das dargestellte Tragwerk besteht aus zwei masselosen Rahmen. Auch hier wurde gemäß dem Prinzip der virtuellen Arbeit bereits die Einspannung in Punkt A des Originalsystems (links) im Ersatzsystem (rechts) durch ein Festlager sowie ein Moment M_A ersetzt. Darüber hinaus wird das Tragwerk durch eine Linienlast q_0 sowie eine Einzelkraft F belastet.

Originalsystem:



Ersatzsystem:



Die virtuellen Verrückungen der Punkte B und C wurden bereits zu

$\delta\boldsymbol{r}_\mathrm{B} = l\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_x + 0\,\boldsymbol{e}_y\,,$

$\delta\boldsymbol{r}_\mathrm{C} = l\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_x - 2\,l\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_y$

bestimmt.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Bestimmen Sie die virtuelle Arbeit δW des Systems. **(1,5 Punkte)**

$$\delta W = -M_{\mathrm{A}}\,\delta\varphi + F\,l\,\delta\varphi + \frac{2}{3}\,q_0\,l^2\,\delta\varphi$$

Bestimmen Sie das Moment M_{A}. **(1,0 Punkte)**

$$\delta W = 0$$

$$\Leftrightarrow\; M_{\mathrm{A}} = F\,l + \frac{2}{3}\,q_0\,l^2$$