TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

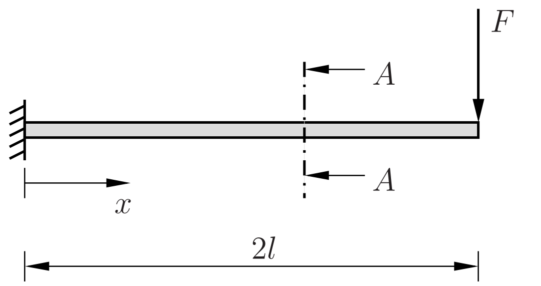
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

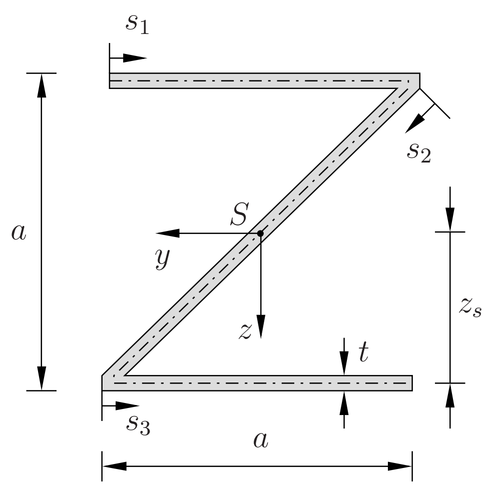
Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)

Ein als masselos anzunehmender Balken, bestehend aus einem dünnwandigen Z-Profil ($t \ll a$), ist an der linken Seite eingespannt und wird an seinem rechten Ende durch eine Kraft F belastet, deren Wirklinie durch den Schubmittelpunkt verläuft. Die Abmessungen des Querschnitts sind der Abbildung zu entnehmen.



Schnitt $A - A$:



Das Flächenträgheitsmoment $I_y = \dfrac{3}{8}\,a^3\,t$ und die Länge $z_s = a/2$ sind für dieses System bereits berechnet.

Bestimmen Sie das statische Moment $S_y(s_1)$ bezüglich der Koordinate s_1 für den Teilbereich $0 \leq s_1 \leq a$. **(0,5 Punkte)**

$$S_y(s_1) = -\tfrac{1}{2}\,s_1\,a\,t$$

Bestimmen Sie das statische Moment $S_y(s_2)$ bezüglich der Koordinate s_2 für den Teilbereich $0 \leq s_2 \leq \sqrt{2}\,a$. **(1,0 Punkte)**

$$S_y(s_2) = -\tfrac{1}{2}\left(a - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,s_2\right)\,s_2\,t - \tfrac{1}{2}\,a^2\,t$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

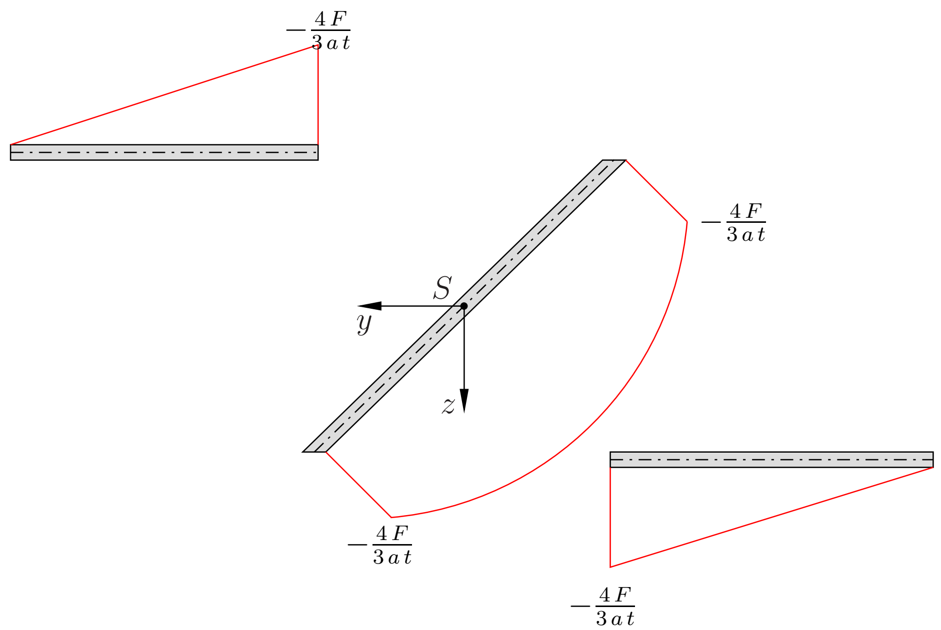
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Bestimmen Sie das statische Moment $S_y(s_3)$ bezüglich der Koordinate s_3 für den Teilbereich $0 \leq s_3 \leq a$. **(0,5 Punkte)**

$$S_y(s_3) \; = -\tfrac{1}{2}\, a^2\, t + \tfrac{1}{2}\, a\, s_3\, t$$

Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf der Schubspannung (Profil zur zeichnerischen Klarheit aufgetrennt). Tragen Sie dabei die Beträge der Werte für die Schubspannungen an den Stellen $s_1 = 0$, $s_1 = a$, $s_3 = 0$ und $s_3 = a$ in Abhängigkeit von F, a und t ein. Kennzeichnen Sie außerdem die Stelle, an der die betragsmäßig maximale Schubspannung auftritt. **(3,0 Punkte)**



Bestimmen Sie den Wert der betragsmäßig größten Schubspannung $\tau_{\max}$ in Abhängigkeit von F, a und t. **(1,0 Punkte)**

$$\tau_{\max} = \frac{F}{a\,t}\left[-\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3}\right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

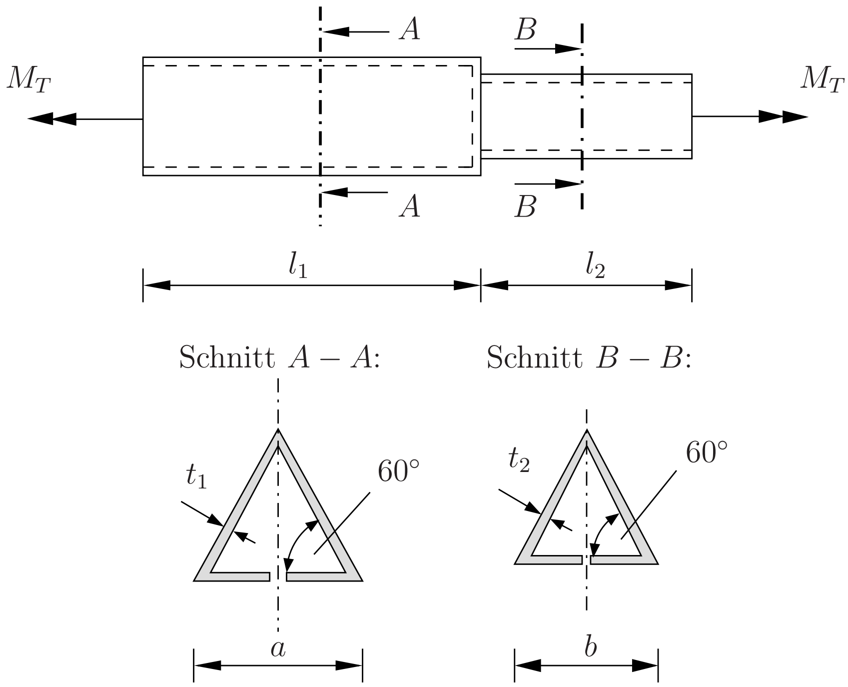
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

b)

Eine aus zwei dünnwandigen, geschlitzten Dreikantwellen zusammengesetzte Welle wird an den Enden durch die entgegengesetzt wirkenden Momente $M_T = 1{,}2 \times 10^3$ Ncm belastet.



Bestimmen Sie den Wert der Schubspannungen in den Schnitten $A-A$ und $B-B$. Nutzen Sie dabei folgende Werte und runden Sie auf zwei Nachkommastellen. **(2,0 Punkte)**

$l_1 = 80$ cm, $l_2 = 50$ cm, $t_1 = 0{,}1$ cm, $t_2 = 0{,}2$ cm, $a = 8$ cm, $b = 7$ cm, $G = 8 \times 10^6$ N/cm^2

$$\tau^A_{\max} = 15000 \frac{N}{cm^3}$$
$$\tau^B_{\max} = 4285 \frac{N}{cm^3}$$

Berechnen Sie die Verdrehwinkel der Querschnitte an beiden Wellenenden relativ zur Übergangsstelle zwischen den Wellen. **(2,0 Punkte)**

$$\theta^A = 1{,}5 \approx 85{,}95°$$
$$\theta^B = 0{,}134 \approx 7{,}674°$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: __________________

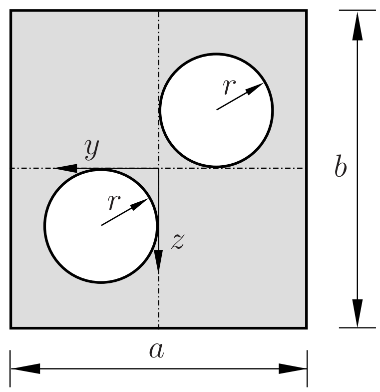
Nachname: __________________

Matr.-Nr.: __________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

a) Gegeben ist das dargestellte Profil (Abmessungen a, b), welches zwei kreisförmige Bohrungen (Radius r) aufweist.
Bestimmen Sie die Flächenträgheitsmomente I_y, I_z und I_{yz} bezüglich des gegebenen Schwerpunktkoordinatensystems. **(3,0 Punkte)**

Hinweis: Sie brauchen die Terme dabei **nicht** zusammenzufassen.



$$I_y = \frac{a\,b^3}{12} - \frac{1}{2}\,\pi\,r^4 - 2\,\pi\,r^4$$

$$I_z = \frac{a^3\,b}{12} - \frac{1}{2}\,\pi\,r^4 - 2\,\pi\,r^4$$

$$I_{yz} = 2\,\pi\,r^4$$

Berechnen Sie für den Fall $b = a$ die Hauptflächenträgheitsmomente I_1, I_2 (mit $I_1 > I_2$) und den Winkel φ zwischen der y-Achse und der ersten Hauptrichtung. **(1,5 Punkte)**

$$I_1 = \frac{a^4}{12} - \frac{1}{2}\,\pi\,r^4$$

$$I_2 = \frac{a^4}{12} - \frac{9}{2}\,\pi\,r^4$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

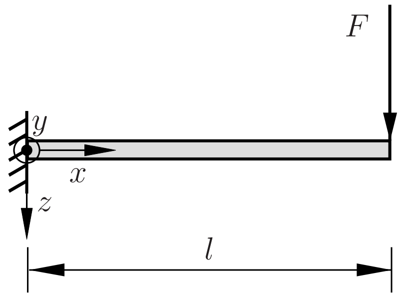
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

b) Für konkrete Relationen der Maße des Profils aus a) lauten die Flächenträgheitsmomente

$$I_y = \frac{37}{60}\,a^4 \,, \qquad I_z = \frac{7}{60}\,a^4 \,,$$
$$I_{yz} = \frac{1}{25}\,a^4 \,.$$



Ein Kragträger, dessen Querschnitt dieses Profil aufweist, ist wie dargestellt mit einer Einzelkraft in z-Richtung belastet. Der Elastizitätsmodul sei allgemein durch E gegeben.

Bestimmen Sie den Biegemomentenverlauf $M_y(x)$, die Funktion der Normalspannung $\sigma_{xx}(x,y,z)$ und geben Sie darüber hinaus die Lage der Nulllinie in der Form $y(z)$ an. **(3,0 Punkte)**

Hinweis: Runden Sie ggf. auf zwei Nachkommastellen.

$$M_y(x) = F\,[x-l]$$

$$\sigma_{xx}(x,y,z) = F\,[x-l]\,[1,66\,z + 0,57\,y]$$

$$y(z) = -\frac{175}{60}\,z = -2,92\,z$$

Geben Sie weiterhin die Position x^* der maximalen Durchbiegung $v(x^*)$ in Richtung der y-Achse sowie deren Betrag $|v(x^*)|$ an. **(1,5 Punkte)**

$$x^* = l$$
$$|v(x^*)| = 0,19\,\frac{F\,l^3}{E\,a^4}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

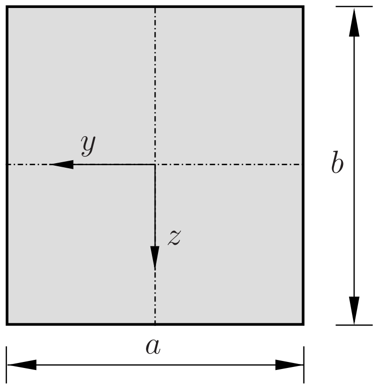
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

c) Betrachtet wird weiterhin der Querschnitt aus Aufgabenteil a). Schlagen Sie eine andere Anordnung der Bohrungen mit $0 < r < a/4 \leq b/4$ vor, so dass die Durchbiegung sowohl in y- als auch in z-Richtung bei dem in b) gegebenen Lastfall minimiert wird. Skizzieren Sie qualitativ ihren Vorschlag in die folgende Zeichnung und begründen Sie ihn kurz! **(1,0 Punkte)**

Hinweis: Ohne Begründung wird die Aufgabe mit 0 Punkten bewertet.



- Symmetrisch um z- bzw. y-Achse $\Rightarrow I_{yz} = 0$
  $\Rightarrow$ Keine schiefe Biegung ($v(x) = 0$)
- Maximaler Flächenträgheitsmoment I_y (negative Steineranteile der Bohrungen fallen weg)
  $\Rightarrow$ Maximale Steifigkeit um y-Achse

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

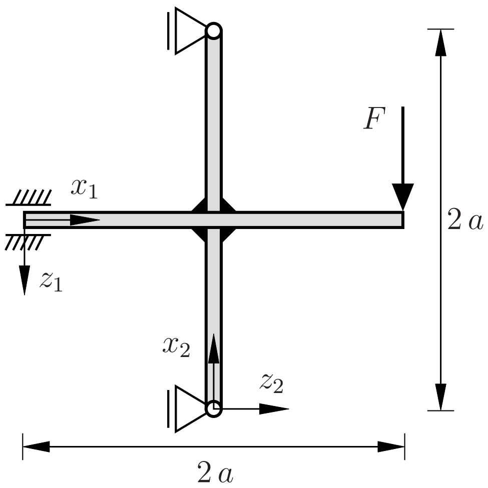
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

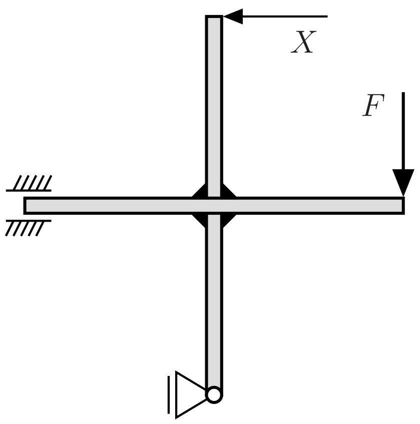
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

Der auf der linken Seite dargestellte Rahmen (Biegesteifigkeit EI) besteht aus zwei Teilstücken der Länge $2\,a$, welche biegestarr miteinander verbunden sind. Abmessungen, Lagerungen und Belastung des Systems sind der Zeichnung zu entnehmen. Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit der statisch überzähligen Kraft X vorgegeben. Anteile aus Normal- und Schubverformung sind hier generell zu vernachlässigen.

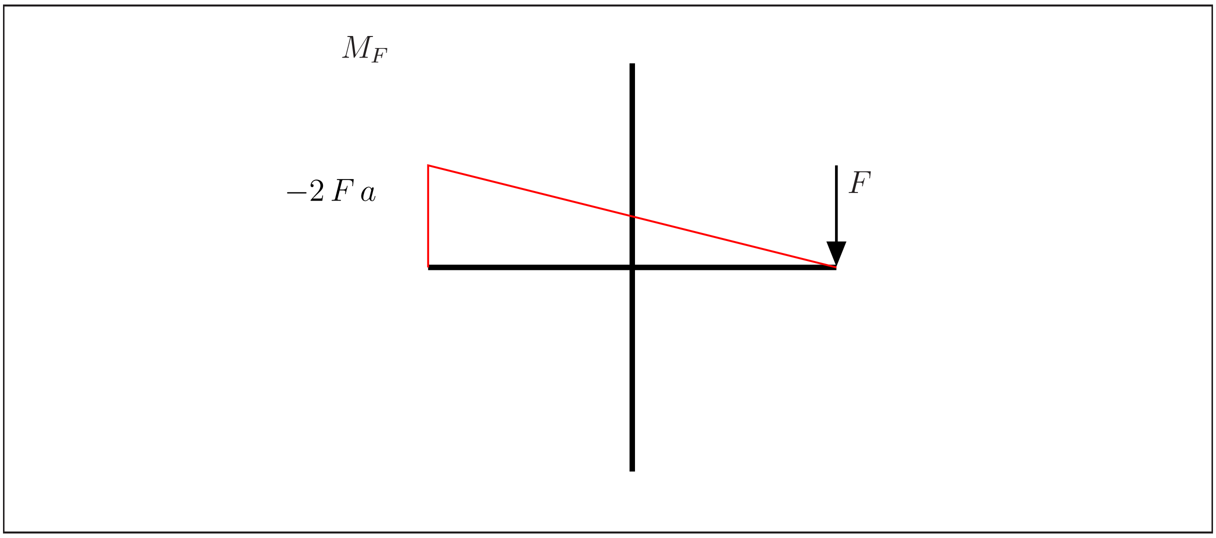


Ersatzsystem:



a)

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M_F des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von F und für $X = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus den jeweiligen Polynomgrad der Funktion an. (**1,5 Punkte**)



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

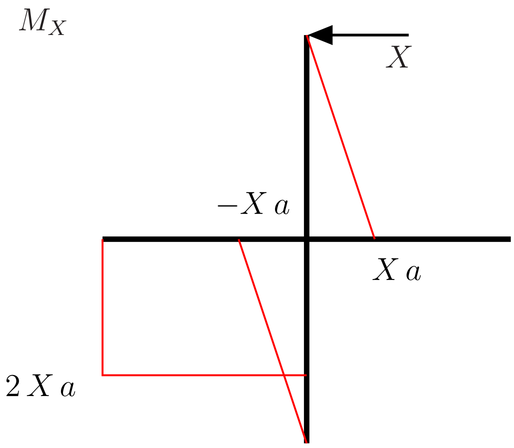
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M_X des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von X und für $F = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus den jeweiligen Polynomgrad der Funktion an. **(2,5 Punkte)**



Geben Sie die im System gespeicherte Gesamtenergie Π als Summe einzelner (nicht zu vernachlässigender) Integrale an. Geben Sie dabei die konkreten Integrationsgrenzen an und verwenden Sie die allgemeinen Ausdrücke $M_F(x_i)$ sowie $M_X(x_i)$ für die Schnittgrößenfunktionen. Die tatsächlichen Funktionen der Schnittgrößen sollen hier **nicht** eingesetzt werden. **(2,0 Punkte)**

$$\Pi = \int_0^a \left[M_F(x_1) + M_X(x_1)\right]^2 \,\mathrm{d}x_1 + \int_a^{2\,a} M_F^2(x_1)\,\mathrm{d}x_1$$
$$+ \int_0^a M_X^2(x_2)\,\mathrm{d}x_2 + \int_a^{2\,a} M_x^2(x_2)\,\mathrm{d}x_2$$

TU Dortmund
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

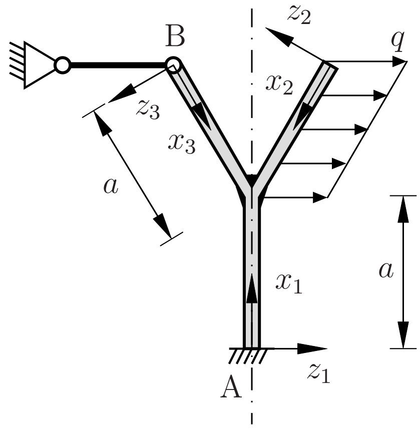
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

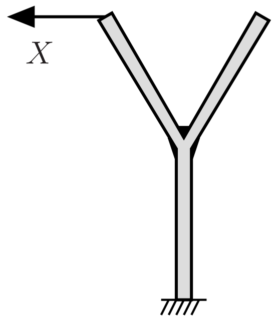
Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

b)

Das rechts dargestellte Balkentragwerk mit drei gleich langen Schenkeln (Länge a) wird durch die Streckenlast q belastet. Die Stabkraft des in Punkt B verbundenen Stabs wurde als statisch überzählige Kraft X gewählt. Die Funktionen der Biegemomentenverläufe sind wie folgt vorgegeben:



Ersatzsystem



- in Abhängigkeit von q für $X = 0$:

$$
\begin{aligned}
M_y^q(x_1) &= -\frac{3}{8}\,q\,a\left[(4+\sqrt{3})\,a - 4\,x_1\right]\\
M_y^q(x_2) &= -\frac{3}{4}\,q\,x_2^2\\
M_y^q(x_3) &= 0
\end{aligned}
$$

- in Abhängigkeit von X für $q = 0$:

$$
\begin{aligned}
M_y^X(x_1) &= \frac{1}{2}\,X\,[a - 2\,x_1]\\
M_y^X(x_2) &= 0\\
M_y^X(x_3) &= \frac{1}{2}\,X\,x_3
\end{aligned}
$$

Berechnen Sie die statisch überzählige Kraft X. Tragen Sie dazu die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis in das Kästchen auf der nachfolgenden Seite ein. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. **(4,0 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

$$2\,EI\,\Pi = \int_0^a \left[M_y^q(x_1) + M_y^X(x_1)\right]^2 \,\mathrm{d}x_1 + \int_0^a \left[M_y^q(x_2)\right]^2 \,\mathrm{d}x_2 + \int_0^a \left[M_y^X(x_3)\right]^2 \,\mathrm{d}x_3$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} \overset{!}{=} 0 \rightarrow \int_0^a \left[M_y^q(x_1) + M_y^X(x_1)\right] \frac{\partial M_y^X}{\partial X}\,\mathrm{d}x_1 + \int_0^a M_y^X(x_3)\,\frac{\partial M_y^X}{\partial X}\,\mathrm{d}x_3 = 0$$

$$\vdots$$

$$X = \frac{3}{4}\,q\,a$$