TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

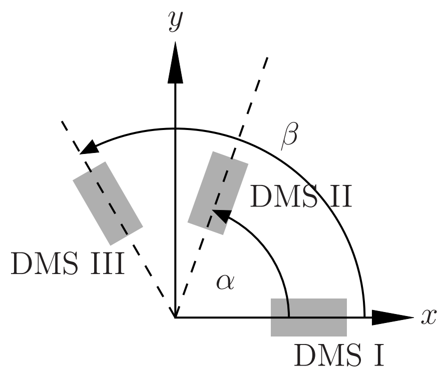
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Bei einer Messung in einem Punkt eines belasteten Blechs wurden drei Dehnungs-Messstreifen (DMS) verwendet und wie rechts dargestellt appliziert. Die Dehnungen der entsprechenden DMS wurden zu ε_{I}, $\varepsilon_{\mathrm{II}}$ und $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ bestimmt sowie der daraus resultierende Dehnungs- und Spannungszustand in diesem Punkt des Blechs unter Voraussetzung eines **ebenen Spannungszustands** berechnet. Das Material kann als linear elastisch isotrop angesehen werden. Im Laufe der Zeit sind einige Daten verloren gegangen, sodass diese nun aus den noch bestehenden Daten reproduziert werden sollen.



a)

Aus den Aufzeichnungen des damaligen Versuchs gehen folgende Größen als gegeben hervor: α, β, ε_{xx}, $\varepsilon_{\mathrm{II}}$, die Schubspannung τ_{xy} sowie der Gleitmodul G. Berechnen Sie aus diesen Vorgaben die Größen ε_{I}, $\varepsilon_{\mathrm{III}}$ und ε_{yy}. **(3,5 Punkte)**

Hinweis: Es gelte $\alpha = \pi/2$, ansonsten sind alle Ergebnisse in symbolischer Form anzugeben!

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = \varepsilon_{xx}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{III}} = \frac{1}{2}[\varepsilon_{xx} + \mathrm{II}] + \frac{1}{2}[\varepsilon_{xx} - \mathrm{II}]\,\cos(2\,\beta) + \frac{\tau_{xy}}{2\,G}\,\sin(2\,\beta)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\mathrm{II}}$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Einige der zunächst verloren gegangenen Daten konnten wiedergefunden werden. Die von den jeweiligen DMS — Anordnung identisch wie bei a) — gemessenen Werte betrugen

$$\varepsilon_{\mathrm{I}} = 0{,}001 \quad , \quad \varepsilon_{\mathrm{II}} = -0{,}00025 \quad , \quad \varepsilon_{\mathrm{III}} = 0{,}005 \quad .$$

Zudem galt für die Querkontraktionszahl des Materials $\nu = 0{,}4$, ε_{yy} wurde zu $-0{,}00025$ bestimmt und die damals ermittelte Spannung σ_{xx} in dem betrachteten Punkt des Blechs betrug 250 MN/m^2. Berechnen Sie aus diesen Vorgaben die Spannungen σ_{yy} und σ_{zz} sowie die Dehnung ε_{zz} und den Wert des Elastizitätsmoduls E. (**4,0 Punkte**)

Hinweis: Die Ergebnisse sind hier in numerischer Form mit entsprechenden Einheiten anzugeben!

$\sigma_{yy} = 41,\overline{6}$ MN/m^2 $\qquad$ $\sigma_{zz} = 0$ MN/m^2

$\varepsilon_{zz} = -0,0005$ $\qquad$ $E = 233.333,\overline{3}$ MN/m^2

Nun wird behauptet, dass bei dem damaligen Versuch die Dehnung ε_{zz} zu $-0{,}0015$ bestimmt wurde und der oben angegebene Wert für ν fraglich erscheint. Ist diese Behauptung zu widerlegen? Geben Sie eine eindeutig nachvollziehbare Begründung für Ihre Antwort an. (**1,5 Punkte**)

Aus dem Zusammenhang $\varepsilon_{zz} = -\nu/[1-\nu]\,[\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}]$ ergibt sich mit den neuen Vorgaben $\nu = 0,\overline{6}$. Dieser Wert ist physikalisch nicht plausibel, da $\nu \leq 0,5$ gelten muss. Die Behauptung muss daher widerlegt werden.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)

In der Mechanik B wurde eine lineare Theorie hergeleitet und angewandt. Erläutern Sie, was die grundlegenden Annahmen dieser linearen Theorie sind und welche Auswirkung dies bei der Berechnung von Reaktionskräften oder Verschiebungen hat. (**1,0 Punkte**)

Die grundlegenden Annahmen der linearen Theorie sind:

- Annahme kleiner Verformungen des Systems, lineare Kinematik, sprich, Dehnungen hängen linear von den Gradienten der Verschiebungen ab.
- Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen ist durch eine lineare Funktion gegeben.

Dies hat u.a. zur Folge, dass sich die Werte von Reaktionskräften proportional zu den Werten der eingeprägten Lasten verhalten (z.B. doppelte Belastung führt zu doppelten Reaktionskräften).

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

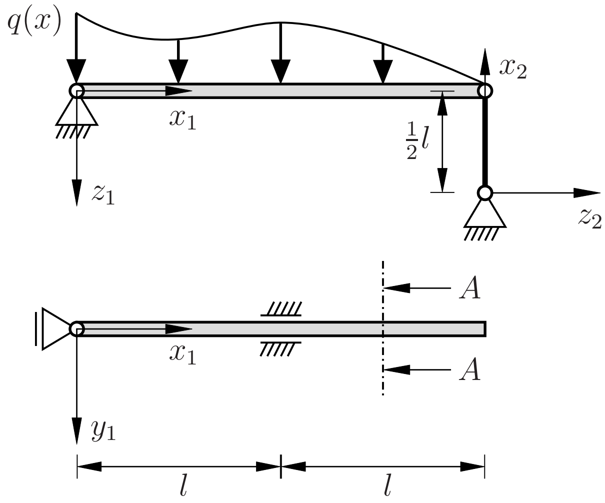
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

a) Ein System, bestehend aus einem Balken (Elastizitätsmodul E, unsymmetrischer Querschnitt) und einem Stab (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche $A(x_2) \neq$ konst.) ist wie dargestellt gelagert und belastet. Beachten Sie die Ansichten von der Seite und von oben.



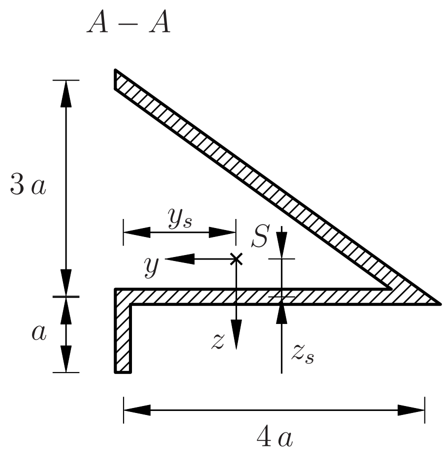
Bestimmen Sie alle kinematischen Randbedingungen, die zum eindeutigen Aufstellen der Biegelinien $w(x_1)$, $v(x_1)$ sowie der Längenänderung des Stabes $u(x_2)$ nötig sind. **(3,0 Punkte)**

Hinweis: Geben Sie die Randbedingungen in der Form $\bullet(x_i = \bullet) = \bullet$ an.

$$w(x_1 = 0) = 0$$
$$w(x_1 = 2\,l) = -u(x_2 = \frac{1}{2}l)$$
$$v(x_1 = l) = 0$$
$$v'(x_1 = l) = 0$$
$$u(x_2 = 0) = 0$$

b) Der Balken aus a) weist das rechts dargestellte unsymmetrische dünnwandige Profil (Abmessungen s. Skizze, Dicke t), mit gegebenem Schwerpunkt $S(y_s, z_s)$ auf. Die Schwerpunktskoordinaten sind bestimmt zu

$$y_s = \frac{9}{5}a\,, \qquad z_s = \frac{7}{10}a\,.$$



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

Nur für das schräge Teilstück wurde das Flächenträgheitsmoment I^1_{yz} bezüglich des gegebenen Schwerpunktkoordinatensystems S bereits bestimmt zu

$$I^1_{yz} = \frac{21}{5}\, a^3\, t\,.$$

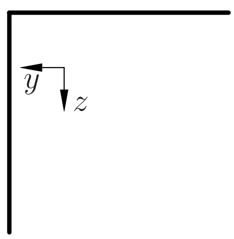
Bestimmen Sie nun das Gesamt-Flächenträgheitsmoment I_{yz} bezüglich des gegebenen Schwerpunktkoordinatensystems S. **(1,5 Punkte)**

Hinweis: Sie brauchen die Terme dabei **nicht** zusammenzufassen.

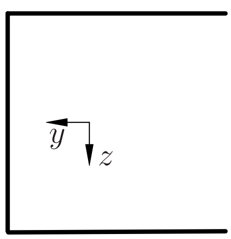
$$\begin{aligned} I_{yz} &= I^1_{yz} - (z_s + \frac{a}{2})\, y_s\, a\, t - z_s\, (y_s - 2\, a)\, 4\, a\, t \\ &= \frac{21}{5} a^3\, t - \frac{54}{25} a^3\, t + \frac{14}{25} a^3\, t = \frac{13}{5} a^3\, t \end{aligned}$$

Betrachten Sie die nachfolgend dargestellten Querschnitte mit eingezeichneten Schwerpunktkoordinatensystemen. Welche Bedingung gilt für I_{yz}? **(1,5 Punkte)**

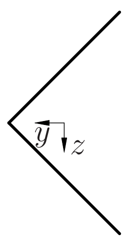
Hinweis: Falsche Kreuze führen zu Punktabzug (dieses Kästchen, minimal 0 Punkte).



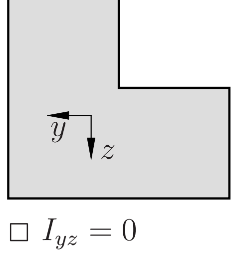
☐ $I_{yz} = 0$
☒ $I_{yz} \neq 0$



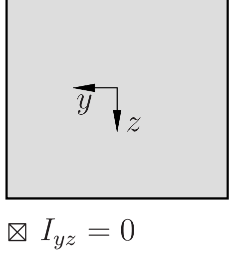
☒ $I_{yz} = 0$
☐ $I_{yz} \neq 0$



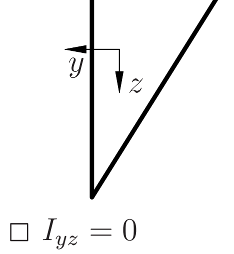
☒ $I_{yz} = 0$
☐ $I_{yz} \neq 0$



☐ $I_{yz} = 0$
☒ $I_{yz} \neq 0$



☒ $I_{yz} = 0$
☐ $I_{yz} \neq 0$



☐ $I_{yz} = 0$
☒ $I_{yz} \neq 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

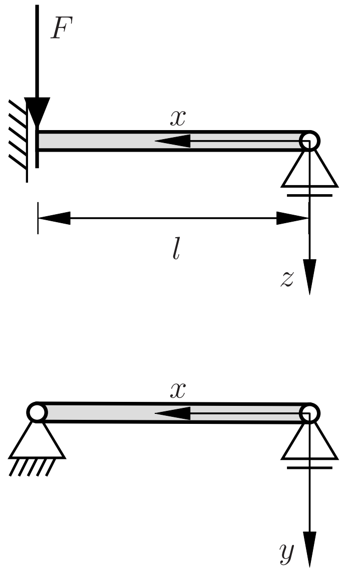
Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

c) Betrachten Sie nun das rechts dargestellte System. Der dünnwandige Balken (Elastitzitätsmodul E) mit unsymmetrischem Querschnitt ist wie dargestellt gelagert und durch die Einzelkraft F belastet. Daraus resultiert der Momentenverlauf

$$M_y(x) = F\,x$$

und die Flächenträgheitsmomente sind bestimmt worden zu

$$I_y = \frac{5}{24}\,a^3\,t\;, \qquad I_z = \frac{5}{24}\,a^3\,t\;,$$
$$I_{yz} = \frac{1}{8}\,a^3\,t\;.$$



Bestimmen Sie vollständig die Biegelinien $w(x)$ und $v(x)$ unter Angabe nur der wichtigsten Zwischenschritte. **(4,0 Punkte)**

Ansatz:

$$E\Delta\,w''(x) = -I_z\,M_y(x) \qquad , \qquad \Delta = I_y\,I_z - I_{yz}^2$$
$$E\Delta\,v''(x) = -I_{yz}\,M_y(x)$$

integrieren:

$$E\Delta\,w(x) = -I_z\,F\frac{x^3}{6} + C_1\,x + C_2$$
$$E\Delta\,v(x) = -I_{yz}\,F\frac{x^3}{6} + C_3\,x + C_4$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0, \qquad w'(l) = 0, \qquad v(0) = 0, \qquad v(l) = 0$$

Biegelinien:

$$w(x) = \frac{F\,I_z}{E\Delta}\left[\frac{1}{2}l^2\,x - \frac{1}{6}x^3\right] = \frac{15\,F}{2\,E\,a^3\,t}\,[\dots]$$
$$v(x) = \frac{F\,I_{yz}}{E\Delta}\left[\frac{1}{6}l^2\,x - \frac{1}{6}x^3\right] = \frac{9\,F}{2\,E\,a^3\,t}\,[\dots]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

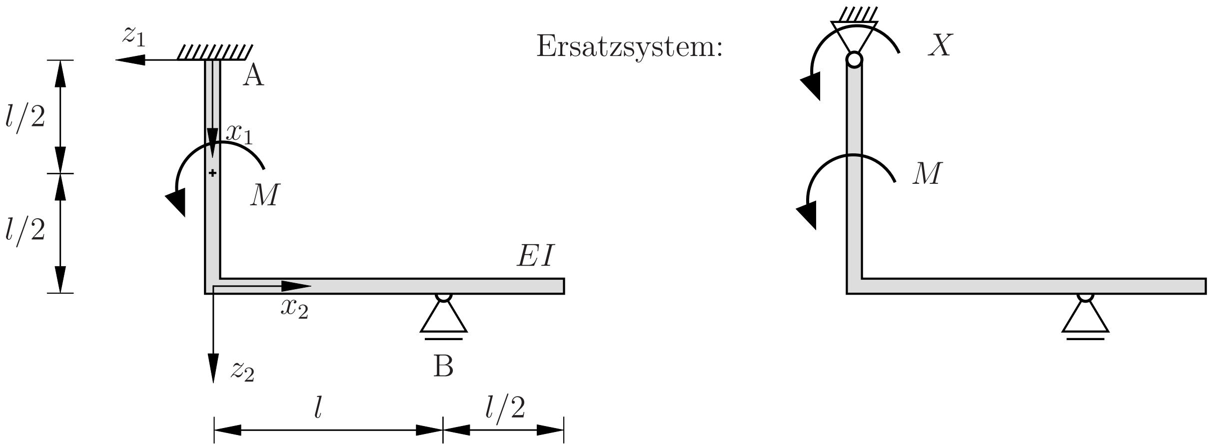
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

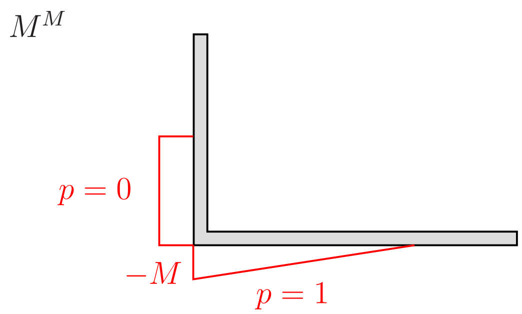
Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

Der auf der linken Seite dargestellte Rahmen (Biegesteifigkeit EI) besteht aus zwei Balken, welche biegestarr miteinander verbunden sind. Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit dem statisch überzähligen Auflagermoment X vorgegeben. Anteile aus Normal- und Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen.



a)

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M^M des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von M und für $X = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus den jeweiligen Polynomgrad der Funktion an. (**1,5 Punkte**)



TU Dortmund

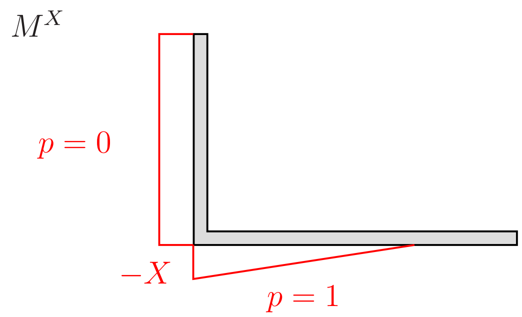
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M^X des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von X und für $M = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus den jeweiligen Polynomgrad der Funktion an. **(1,5 Punkte)**



Geben Sie die im System gespeicherte Gesamtenergie Π als Summe einzelner (nicht zu vernachlässigender) Integrale an. Geben Sie dabei die konkreten Integrationsgrenzen an und verwenden Sie die allgemeinen Ausdrücke M^M sowie M^X für die Schnittgrößenfunktionen. Die tatsächlichen Funktionen der Schnittgrößen sollen hier **nicht** eingesetzt werden. **(1,5 Punkte)**

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^{l/2} \frac{(M^X)^2}{EI}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_{l/2}^{l} \frac{(M + M^X)^2}{EI}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l} \frac{(M + M^X)^2}{EI}\,\mathrm{d}x_2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

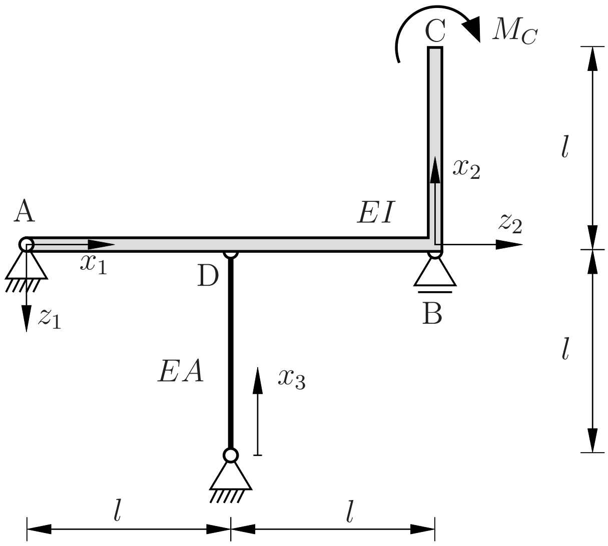
Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

b)
Der rechts dargestellte Rahmen (Biegesteifigkeit EI) ist in den Punkten A und B wie dargestellt gelagert. Zusätzlich ist im Punkt D eine Pendelstütze (Dehnsteifigkeit EA) angebracht. Im Punkt C greift ein externes Moment M_C an. Die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen. In diesem System wurde die in der Pendelstütze wirkende Kraft X als statisch überzählige gewählt und soll im Folgenden bestimmt werden. Die Funktionen der Biegemomente und der Normalkraft sind wie folgt für das Ersatzsystem vorgegeben:



- in Abhängigkeit von M_C für $X = 0$:

$$M^{M_C}(x_1) = -\frac{M_C}{2l}\,x_1$$
$$M^{M_C}(x_2) = -M_C$$
$$N^{M_C}(x_3) = 0$$

- in Abhängigkeit von X für $M_C = 0$:

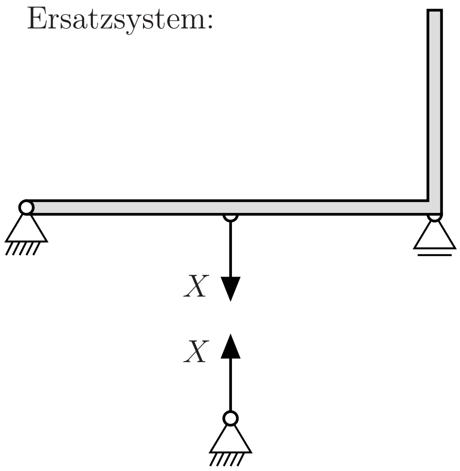
$0 \leq x_1 \leq l$:

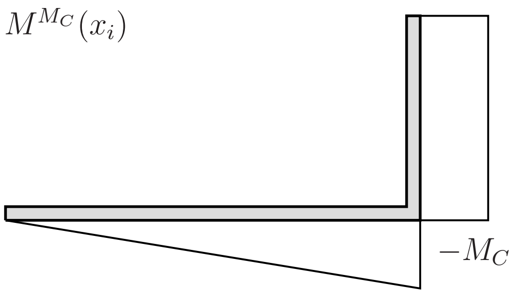
$$M^X(x_1) = \frac{X}{2}\,x_1$$

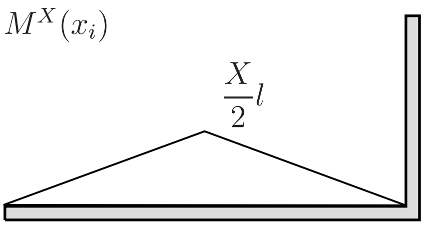
$l < x_1 \leq 2l$:

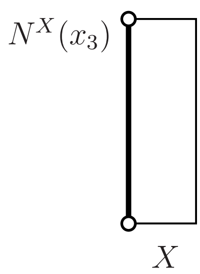
$$M^X(x_1) = -\frac{X}{2}\,x_1 + Xl$$
$$M^X(x_2) = 0$$
$$N^X(x_3) = X$$

Ersatzsystem:









TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

Berechnen Sie die statisch überzählige Kraft X. Tragen Sie dazu die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis in das nachfolgende Kästchen ein. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. **(5,5 Punkte)**

$$\begin{aligned}\Pi =& \frac{1}{2}\int_0^l \frac{1}{EI}\left(M^{M_C}+M^X\right)^2\,\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_l^{2l} \frac{1}{EI}\left(M^{M_C}+M^X\right)^2\,\mathrm{d}x_1 + \\ & \frac{1}{2}\int_0^l \frac{1}{EI}\left(M^{M_C}+M^X\right)^2\,\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{1}{EA}\left(N^{M_C}+N^X\right)^2\,\mathrm{d}x_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Pi}{\partial X} = 0 = \frac{1}{EI}\Big[& \int_0^l M^{M_C}\frac{\partial M^X}{\partial X}\,\mathrm{d}\,x_1 + \int_0^l M^X\frac{\partial M^X}{\partial X}\,\mathrm{d}x_1 + \\ & \int_l^{2l} M^{M_C}\frac{\partial M^X}{\partial X}\,\mathrm{d}\,x_1 + \int_l^{2l} M^X\frac{\partial M^X}{\partial X}\,\mathrm{d}x_1 + \\ & \int_0^l \underbrace{M^{M_C}\frac{\partial M^X}{\partial X}}_{=0}\,\mathrm{d}\,x_2 + \int_0^l \underbrace{M^X\frac{\partial M^X}{\partial X}}_{=0}\,\mathrm{d}x_2\Big] + \\ \frac{1}{EA} & \int_0^l \underbrace{N^{M_C}\frac{\partial N^X}{\partial X}}_{=0}\,\mathrm{d}\,x_3 + \int_0^l N^X\frac{\partial N^X}{\partial X}\,\mathrm{d}x_3\end{aligned}$$

$$0 = \frac{1}{EI}\Big[\frac{1}{3}l(-\frac{M_C}{2})\frac{1}{2}l + \frac{1}{3}l\frac{X}{2}l\frac{1}{2}l + \frac{1}{6}l(-\frac{2M_C}{2} - M_C)\frac{1}{2}l + \frac{1}{3}l\frac{X}{2}l\frac{1}{2}l\Big] + \frac{1}{EA}Xl$$

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{EI}\Big[-\frac{3}{12}M_C l^2 + \frac{2}{12}Xl^3\Big] + \frac{Xl}{EA} \\ 0 &= \frac{EI}{EA}Xl - \frac{3}{12}M_C l^2 + \frac{2}{12}Xl^3 \\ \frac{1}{4}M_C\,l^2 &= \frac{EI}{EA}lX + \frac{1}{6}Xl^3 \Rightarrow \frac{1}{4}M_C\,l^2 = X\left[\frac{EI}{EA}l + \frac{1}{6}l^3\right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow X = \frac{M_C}{4l\left(\dfrac{I}{Al^2}+\dfrac{1}{6}\right)}$$