TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

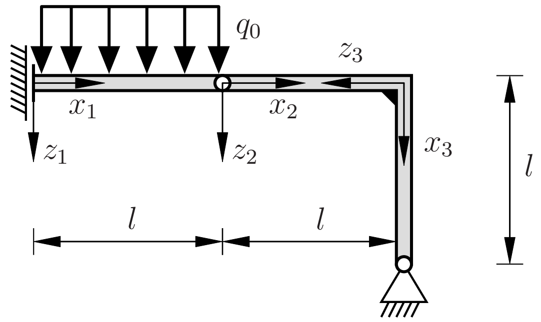
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Das nebenstehende Tragwerk besteht aus dehnstarren Balken (Biegesteifigkeit EI) und ist wie dargestellt gelagert und belastet. Die Ecke sei biegestarr. Aufgrund der Belastung und Geometrie wird das System in drei Bereiche mit ihren jeweiligen Koordinatensystemen unterteilt.



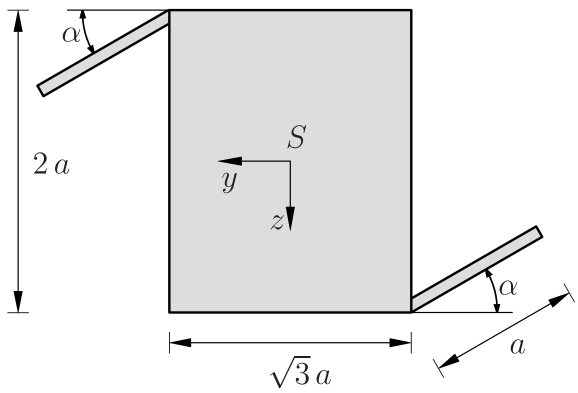
a)

Geben Sie alle **kinematischen** Rand- und Übergangsbedingungen an, die zur Bestimmung der Biegelinien $w_i(x_i)$ erforderlich sind. Kennzeichnen Sie eindeutig die zugehörigen Bereiche und Koordinaten mit den Indizes 1, 2 bzw. 3. **(3,0 Punkte)**

$$\begin{aligned} w_1(x_1 = l) &= w_2(x_2 = 0) & \qquad w_1'(x_1 = 0) &= 0 \\ w_2(x_2 = l) &= 0 & w_2'(x_2 = l) &= w_3'(x_3 = 0) \\ w_3(x_3 = 0) &= 0 & w_3(x_3 = l) &= 0 \end{aligned}$$

b)

Das nebenstehende Profil besteht aus einem Rechteck sowie zwei als dünn anzunehmenden Rippen (Länge a, Dicke $t \ll a$), die im Winkel α angeschweißt sind. Der Ursprung des angegebenen Koordinatensystems liegt im Schwerpunkt S des Profils.



Berechnen Sie das auf den Schwerpunkt bezogene Flächenträgheitsmoment I_y des Profils. **(2,0 Punkte)**

$$I_y = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,a^4 + 2\,a^3\,t\left[\frac{\sin^2(\alpha)}{12} + \left[1 - \frac{1}{2}\sin(\alpha)\right]^2\right] = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,a^4 + 2\,a^3\,t\left[1 - \sin(\alpha) + \frac{1}{3}\sin^2(\alpha)\right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

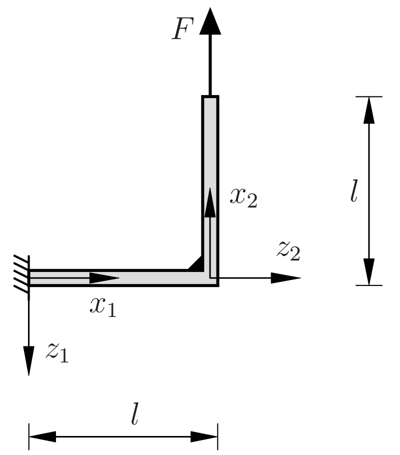
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

c)
Der nebenstehend abgebildete, abgewinkelte dehnstarre Balken (Biegesteifigkeit EI) mit biegestarrer Ecke ist wie dargestellt gelagert und mit einer Einzellast F belastet.



Berechnen Sie die eindeutige Funktion der Biegelinie des Balkens. Achten Sie auf eine eindeutige Kennzeichnung der Bereiche und Koordinaten. **(2,5 Punkte)**

$$
\begin{aligned}
E\,I\,w_1(x) &= -\frac{1}{6}\,F\,[l-x_1]^3 - \frac{1}{2}\,F\,l^2\,x_1 + \frac{1}{6}\,F\,l^3 \\
&= \frac{1}{6}\,F\,x_1^3 - \frac{1}{2}\,F\,l\,x_1^2 \\
E\,I\,w_2(x) &= -\frac{1}{2}\,F\,l^2\,x_2
\end{aligned}
$$

Vorname: ____________________

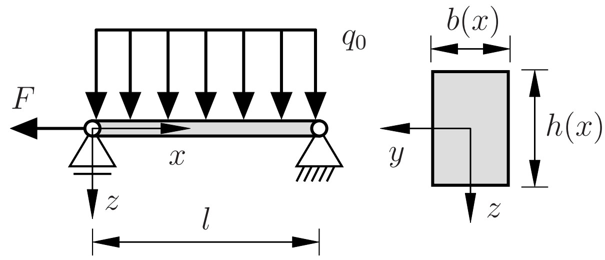
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

d)

Der nebenstehend abgebildete Balken (Länge l) ist mit einer konstanten Streckenlast q_0 sowie einer Einzelkraft $F = q_0\, l$ belastet und weist einen rechteckigen die zulässige Spannung σ_{zul} charakterisiert. Die x-Achse des Koordinatensystems verläuft an jeder Stelle x durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche.



Der Normalkraftverlauf $N(x)$ und der Momentenverlauf $M_y(x)$ sind gegeben durch:

$$N(x) = q_0\, l \qquad\qquad M_y(x) = \frac{1}{2}\, q_0\, [l\, x - x^2]$$

Bestimmen Sie die Funktion der Normalspannung $\sigma_{xx}(x, z)$ unter der Annahme, dass $h(x)$ und $b(x)$ gegeben sind. **(1,0 Punkte)**

$$\sigma_{xx}(x, z) = \frac{q_0\, l}{A} + \frac{6\, q_0}{A\, h^2(x)} \left[l\, x - x^2\right] z$$

Bestimmen Sie zunächst die maximale Spannung $\sigma^{\max}(x) = \max(|\sigma_{xx}(x, z)|)$ an jeder Stelle x. Dimensionieren Sie anschließend $h(x)$ und $b(x)$ so, dass an jeder Stelle x gilt: $\sigma^{\max}(x) = \sigma_{\text{zul}}$. Beachten Sie dabei die konstante Querschnittsfläche A. **(1,5 Punkte)**

$$\begin{aligned} \sigma^{\max}(x) &= \frac{q_0\, l}{A} + \frac{3\, q_0}{A\, h(x)} \left[l\, x - x^2\right] \\ h(x) &= \frac{3\, q_0}{A\, \sigma_{\text{zul}} - q_0\, l} \left[l\, x - x^2\right] \\ b(x) &= \frac{A}{h(x)} \end{aligned}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

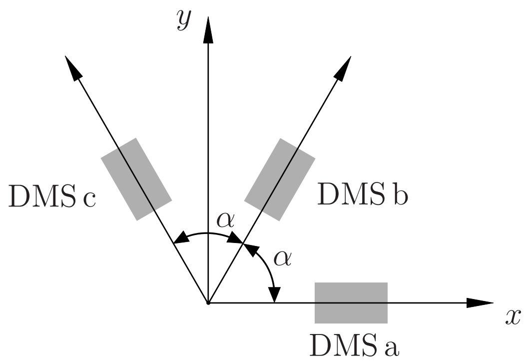
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

Zur Ermittlung des Dehnungszustands eines Blechs wurden drei Dehnungs-Messstreifen (DMS) verwendet und wie rechts dargestellt auf die Blechprobe aufgebracht. Die Dehnungen der entsprechenden DMS wurden zu ε_a, ε_b und ε_c bestimmt. Für das Blech kann von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen werden. Das Materialverhalten sei linear elastisch und isotrop. Es sind einige Daten verloren gegangen, sodass diese nun aus den noch vorhandenen Daten reproduziert werden sollen.



a)

Bei der verwendeten DMS-Rosette ist der **Winkel** $\boldsymbol{\alpha = \pi/3}$ angegeben. Neben den Dehnungen ε_a und ε_b in den beiden rechten DMS sind zudem die Schubspannung τ_{xy} und der Schubmodul G gegeben. Berechnen Sie hiermit die Dehnungen ε_{xx}, ε_{yy} und ε_c in symbolischer Form. **(3,0 Punkte)**

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_\mathrm{a}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{3}\left[-\varepsilon_\mathrm{a} + 4\,\varepsilon_\mathrm{b} - \frac{\sqrt{3}\,\tau_{xy}}{G}\right]$$

$$\varepsilon_\mathrm{c} = \varepsilon_\mathrm{b} - \frac{\sqrt{3}\,\tau_{xy}}{2\,G}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

b)

Bei einer DMS-Messung an einem Aluminiumblech ist für die ε_{xx}-Komponente der Dehnung der Wert -0.00086 und für die ε_{yy}-Komponente der Dehnung der Wert 0.00187 bestimmt worden. Darüber hinaus wurde für die Spannungs-Komponente σ_{yy} der Wert 125 MPa berechnet. Die Querkontraktionszahl des Materials liegt bei $\nu = 0{,}34$. Berechnen Sie unter der Annahme eines **ebenen Spannungszustands** die Dehnungs-Komponente ε_{zz}, die Spannungs-Komponente σ_{xx} sowie den Elastizitätsmodul E. **(4,0 Punkte)**

Hinweis: Die Ergebnisse sind hier in numerischer Form (ggf. mit mindestens drei relevanten Nachkommastellen ungleich Null) mit entsprechenden Einheiten anzugeben!

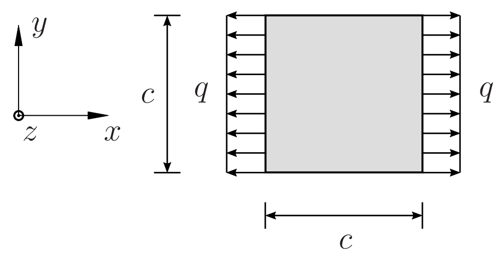
$E = 70074.797\,\mathrm{MPa}$

$\sigma_{xx} = -17.764\,\mathrm{MPa}$

$\varepsilon_{zz} = -0.0005203$

c)

Die quadratische Zugprobe mit der Kantenlänge c und Dicke t wird wie dargestellt mit der konstanten Zugspannung q belastet. Die Zugprobe kann sich in z-Richtung ungehindert verformen. Nehmen Sie an, dass sich das Material der Zugprobe isotrop und linear-elastisch verhält (E-Modul E, Querkontraktionszahl ν, Wärmeausdehnungskoeffizient α_T).



Bestimmen Sie die notwendige Temperaturänderung der Zugprobe, sodass sich die Länge der Zugprobe in x-Richtung infolge der Belastung nicht ändert. **(1,0 Punkte)**

$$\Delta T = -\frac{q}{\alpha_T\, E}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

d)

Für einen gegebenen Deformationszustand ergibt sich die Koeffizientenmatrix des Spannungstensors zu

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{ij} = \begin{bmatrix} a\,[\,\lambda + 2\,\mu\,] & b\,\mu \\ b\,\mu & a\,\lambda \end{bmatrix}$$

wobei λ und μ die sogenannten Lamé-Parameter sind.

Berechnen Sie die maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ und erläutern Sie anschließend in eigenen Worten, welcher der beiden Lamé-Parameter für eine Materialauswahl mittels der Versagenshypothese nach Tresca für den gegebenen Lastfall maßgeblich ist. (**2,0 Punkte**)

$\tau_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2}\,\mu$

Der Parameter μ ist bei dem gegebenen Lastfall maßgeblich, da der Parameter λ im Auslegungskriterium nicht vorkommt.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

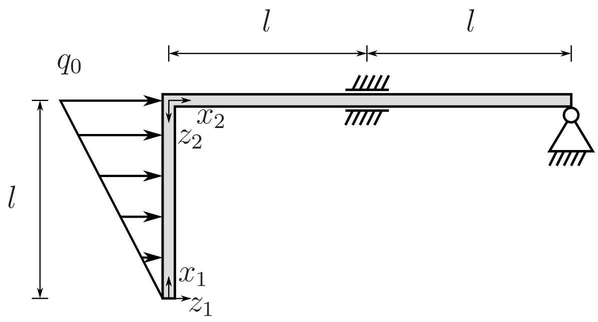
Matr.-Nr.: ____________________

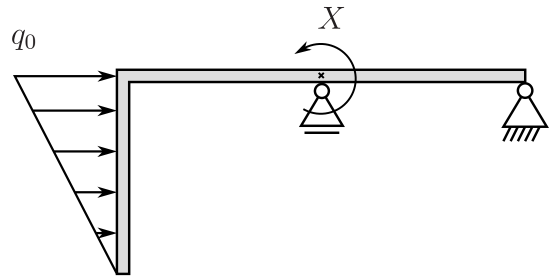
Aufgabe 3 (Seite 1 von 5)

a)

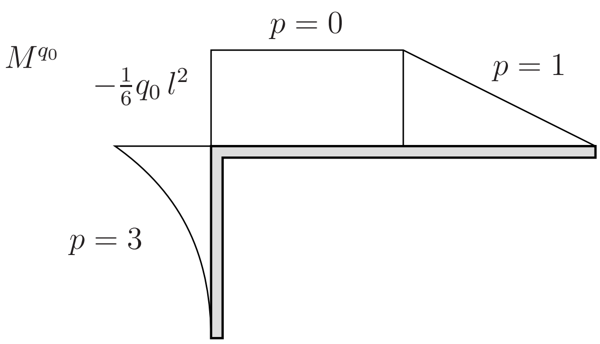
Der auf der linken Seite dargestellte Rahmen (Biegesteifigkeit EI) ist wie dargestellt gelagert und belastet. Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit dem statisch überzähligen Auflagermoment X vorgegeben. Anteile aus Normal- und Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen.

Ersatzsystem:





Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M^{q_0} des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme für $X = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus die jeweiligen Polynomgrade p der Funktionen an. (**2,0 Punkte**)



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

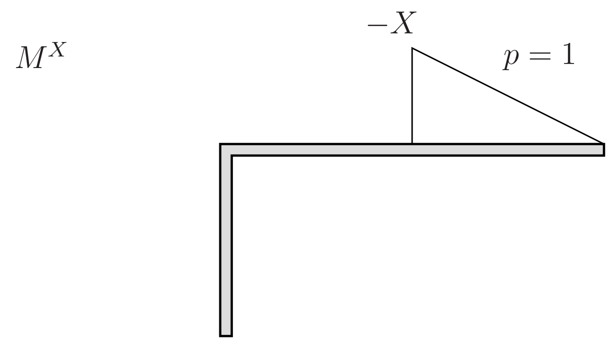
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 5)

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M^X des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von X und für $q_0 = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus die jeweiligen Polynomgrade p der Funktionen an. **(1,0 Punkte)**



Geben Sie die im System gespeicherte Gesamtenergie Π als Summe einzelner (nicht zu vernachlässigender) Integrale an. Geben Sie dabei die konkreten Integrationsgrenzen an und verwenden Sie die allgemeinen Ausdrücke M^{q_0} sowie M^X für die Schnittgrößenfunktionen. Die tatsächlichen Funktionen der Schnittgrößen sollen hier **nicht** eingesetzt werden.

(1,5 Punkte)

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{x_1=0}^{l} \frac{[M^{q_0}(x_1)]^2}{EI} \, \mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2} \int_{x_2=0}^{l} \frac{[M^{q_0}(x_2)]^2}{EI} \, \mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2} \int_{x_2=l}^{2l} \frac{\left[M^{q_0}(x_2) + M^X(x_2)\right]^2}{EI} \, \mathrm{d}x_2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

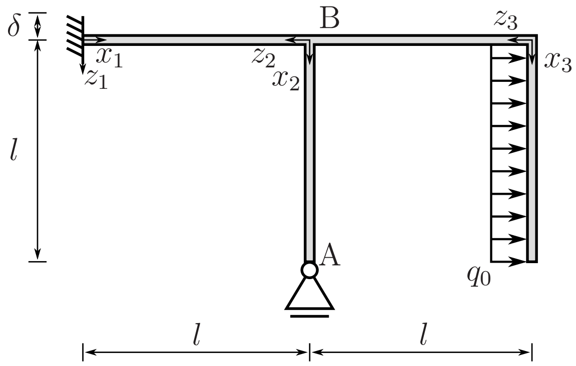
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

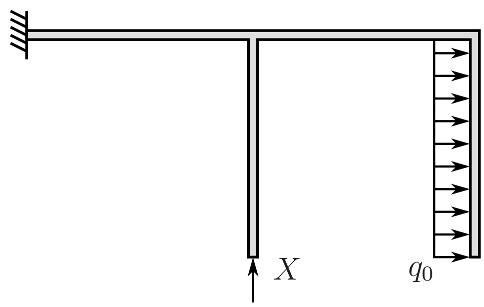
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 5)

b)
Der unten abgebildete Rahmen (Dehnsteifigkeit EA, Biegesteifigkeit EI) ist wie dargestellt gelagert und belastet. Die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen. Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit der statisch überzähligen Auflagerkraft X vorgegeben. Beiträge aus Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen.



Ersatzsystem:



Die Funktionen der Biegemomente und der Normalkräfte sind wie folgt für das Ersatzsystem vorgegeben:

in Abhängigkeit von q_0 für $X = 0$:

$$M^{q_0}(x_1) = \frac{1}{2}\, q_0\, l^2$$
$$M^{q_0}(x_2) = 0$$
$$M^{q_0}(x_3) = \frac{1}{2}\, q_0\, [l - x_3]^2$$
$$N^{q_0}(x_1) = q_0\, l$$
$$N^{q_0}(x_2) = 0$$
$$N^{q_0}(x_3) = 0$$

in Abhängigkeit von X für $q_0 = 0$:

$$M^X(x_1) = [l - x_1]\, X \qquad \text{für } 0 \le x_1 \le l$$
$$M^X(x_1) = 0 \qquad \text{für } l < x_1 \le 2\,l$$
$$M^X(x_2) = 0$$
$$M^X(x_3) = 0$$
$$N^X(x_1) = 0$$
$$N^X(x_2) = -X$$
$$N^X(x_3) = 0$$

Auf der folgenden Seite finden Sie die skizzierten Verläufe inklusive der jeweiligen Funktionswerte an den Bereichsgrenzen.

TU Dortmund

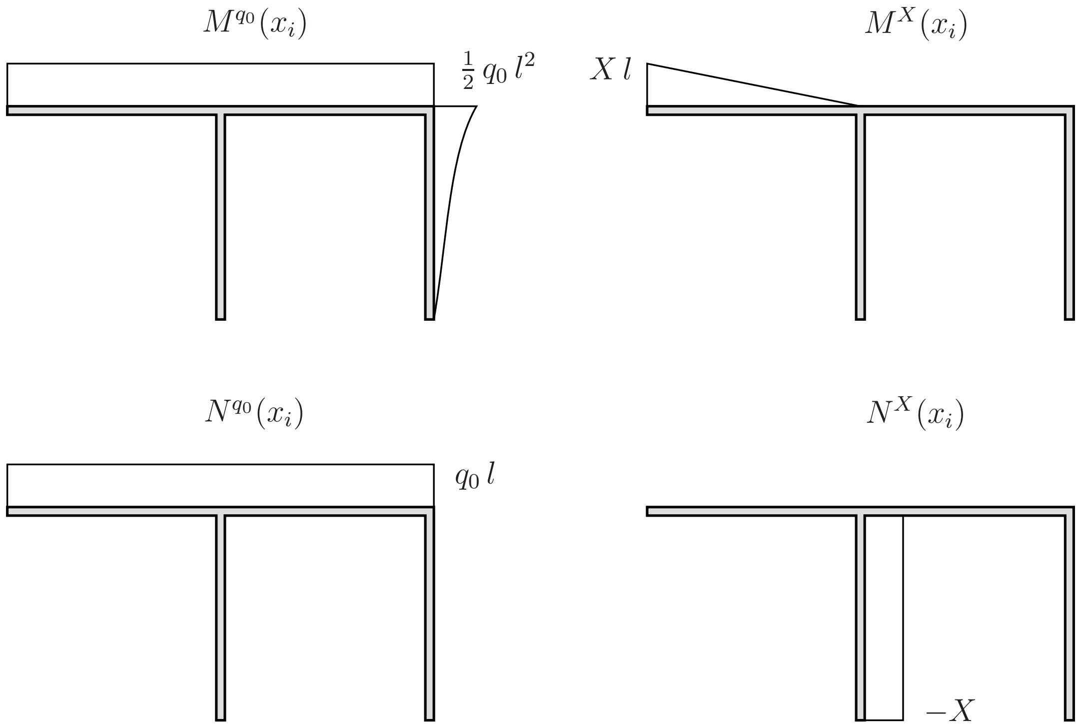
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 5)



Berechnen Sie die statisch überzählige Kraft X. Tragen Sie dazu die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis in das **Kästchen auf der nachfolgenden Seite** ein. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. (**4,0 Punkte**)

Nehmen Sie im Folgenden an, dass das Lager A versagt, sodass dort keine Kraft mehr aufgenommen werden kann. Bei welchem kritischen Wert der Streckenlast $\bar{q}_0$ verschiebt sich der Punkt B um δ in negative z_1-Richtung? (**1,5 Punkte**)

$$\bar{q}_0 = \frac{4EI}{l^4}\delta$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 5 von 5)

Lösung zu Aufgabenteil b):

Aus der Kompatibilitätsbedingung

$$w = \alpha_{10} + X\,\alpha_{11} \overset{!}{=} 0$$

mit Einflusszahlen

$$\alpha_{10} = \int_{x_1=0}^{l} \frac{M^{q_0}\,M^1}{EI}\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2}\left[q_0\frac{l^2}{2}\right]['1'\,l]\,l\frac{1}{EI} \quad = \frac{1}{4}q_0\,l^4\frac{1}{EI}$$

und

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \int_{x_1=0}^{l} \frac{M^1\,M^1}{EI}\mathrm{d}x_1 + \int_{x_2=0}^{l} \frac{N^1\,N^1}{EA}\mathrm{d}x_2 \\ &= \frac{1}{3}\,['1'\,l]\,['1'\,l]\;l\frac{1}{EI} + [-'1']\,[-'1']\;l\,\frac{1}{EA} \quad = \frac{1}{3}l^3\frac{1}{EI} + l\frac{1}{EA}\end{aligned}$$

folgt

$$\boxed{X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = -\frac{\frac{1}{4}q_0\,l^4\frac{1}{EI}}{\frac{1}{3}l^3\frac{1}{EI} + l\frac{1}{EA}}}$$