TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

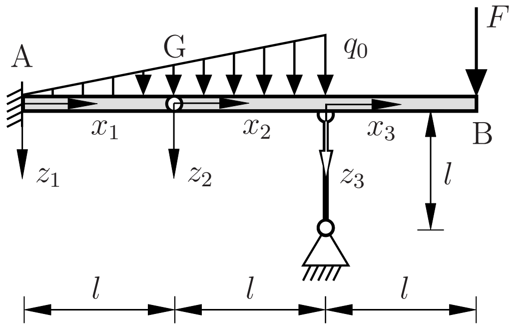
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Das nebenstehende Tragwerk besteht aus zwei Balken (Biegesteifigkeit EI), welche im Punkt G mit einem Gelenk verbunden und wie dargestellt belastet sind.
Die Mitte des zweiten Balkens ist durch eine Pendelstütze (Dehnsteifigkeit EA, Länge l) gelagert.



a)

Geben Sie alle **dynamischen** Randbedingungen an der Stelle B bei $x_3 = l$ an. (**0,5 Punkte**)

$$Q_3(x_3 = l) = F = -EI\, w_3'''(x_3 = l)$$

$$M_3(x_3 = l) = 0 = -EI\, w_3''(x_3 = l)$$

Geben Sie alle **kinematischen** Rand- und Übergangsbedingungen an, die zur Bestimmung der Biegelinien $w_i(x_i)$ des Gesamtsystems erforderlich sind.
Kennzeichnen Sie eindeutig die zugehörigen Bereiche mit den entsprechenden Indizes.
Nehmen Sie die Stauchung Δl der Pendelstütze als bekannt an. (**2,0 Punkte**)

$$w_1(x_1 = 0) = 0 \qquad w_1(x_1 = l) = w_2(x_2 = 0) \qquad w_2(x_2 = l) = w_3(x_3 = 0)$$

$$w_1'(x_1 = 0) = 0 \qquad w_2(x_2 = l) = \Delta l \qquad w_2'(x_2 = l) = w_3'(x_3 = 0)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

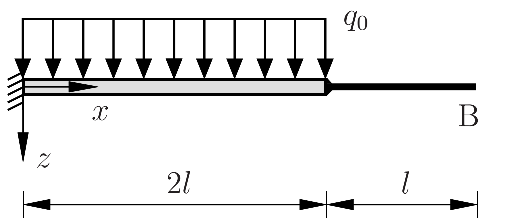
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

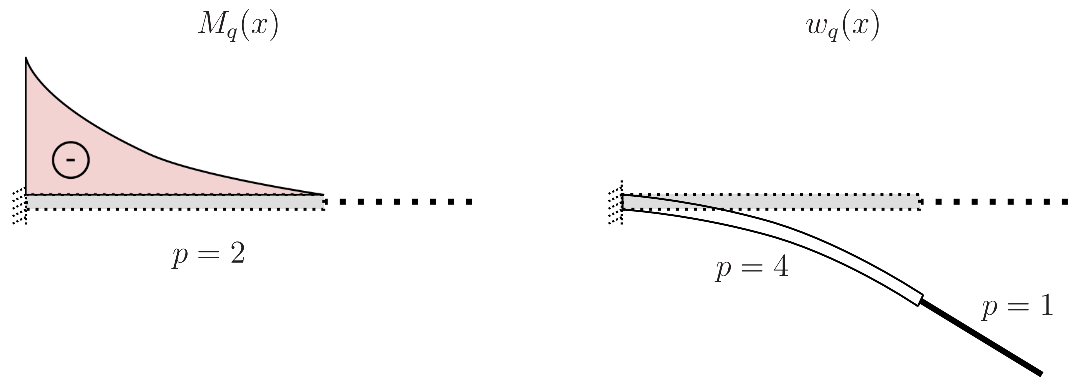
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

Der nebenstehende Kragträger (Länge $2l$, Biegesteifigkeit EI) ist wie dargestellt belastet und am Ende mit einem **starren** Stab der Länge l verschweißt.



b)
Zeichnen Sie **qualitativ** den Verlauf des Biegemomentes $M_q(x)$ und die Gestalt der Biegelinie $w_q(x)$ für $0 \leq x \leq 3l$ unter Angabe der jeweiligen Polynomgrade p. (**1,0 Punkte**)



Berechnen Sie die vertikale Verschiebung d des Punktes B.
Geben Sie zunächst nur den allgemeinen Ausdruck für d in Abhängigkeit der Funktionen $w_q(x)$ und $w_q'(x)$ **im Bereich $\mathbf{0 \leq x \leq 2l}$** an. (**1,0 Punkte**)

$$d = w(x = 2l) + w'(x = 2l) \cdot l$$

Die aus der Streckenlast resultierende Biegelinie $w_q(x)$ des Trägers sei nun zu

$$w_q(x) = \frac{q_0 l^4}{EI}\left[\frac{1}{24}\frac{x^4}{l^4} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^2}{l^2}\right] \qquad \text{für} \qquad 0 \leq x \leq 2l$$

gegeben.
Konkretisieren Sie den obigen Ausdruck für die Vertikalverschiebung d in Abhängigkeit der gegebenen Größen $q_0,\ EI$ und l. (**1,0 Punkte**)

$$d = \frac{q_0 l^4}{EI}\left[\left[\frac{16}{24} - \frac{8}{3} + 4\right] + \left[\frac{8}{6} - 4 + 4\right]\right] = \frac{10}{3}\frac{q_0 l^4}{EI}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

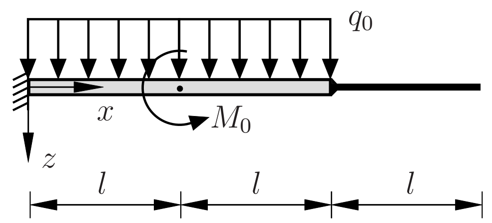
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

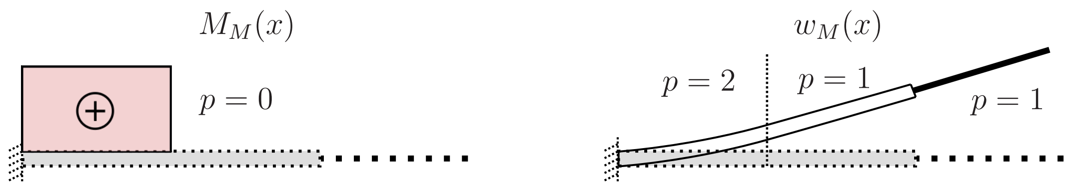
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

Das obige System aus Aufgabenteil b) wird nun **zusätzlich** durch ein Moment M_0 in der Balkenmitte belastet.



c)
Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf des **ausschließlich** aus dem Moment M_0 resultierenden Biegemomentes $M_M(x)$ sowie die Gestalt der resultierenden Biegelinie $w_M(x)$ im Bereich $0 \leq x \leq 3l$ unter Angabe der jeweiligen Polynomgrade p. (**1,0 Punkte**)



Wie groß muss M_0 sein, so dass der angeschweißte Stab **unter der Gesamtbelastung** des Trägers durch q_0 und M_0 waagerecht bleibt? Geben Sie explizit die notwendigen Rand- und Übergangsbedingungen, sowie relevante Zwischenergebnisse und Rechenschritte an. (**3,5 Punkte**)

Verdrehungs-DGL folgt aus Ableitung von $w_q(x)$:

$$w_q'(x) = \frac{q_0 l^4}{EI}\left[\frac{1}{6}\frac{x^3}{l^4} - \frac{x^2}{l^3} + \frac{2\,x}{l^2}\right]$$

Biegemomente und Verdrehungs-DGLs infolge M_0 :

$$M_{M1}(x) = M_0; \qquad M_{M2}(x) = 0$$

$$EI\, w_{M1}'(x) = -M_0\, x + C_1 \quad \text{mit RB} \quad w_{M1}'(x=0) = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

$$EI\, w_{M2}'(x) = 0 + C_2 \quad \text{mit RB} \quad w_{M1}'(x=l) = w_{M2}'(x=l)$$

$$\Rightarrow C_2 = -M_0\, l$$

$$\text{somit folgt} \quad w_{M2}'(x) = -\frac{M_0\, l}{EI}.$$

$$\text{Mit Randbedingung:} \quad w_2'(x=2l) = 0 = w_q'(x=2l) + w_{M2}'(x=2l) \quad \text{folgt}$$

$$0 = \frac{q_0 l^3}{EI}\left[\frac{8}{6} - 4 + 4\right] - \frac{M_0\, l}{EI}$$

$$\Leftrightarrow M_0 = \frac{4}{3} q_0 l^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

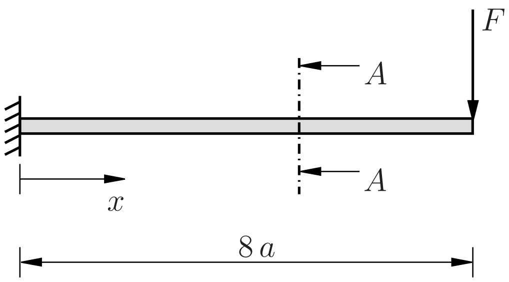
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

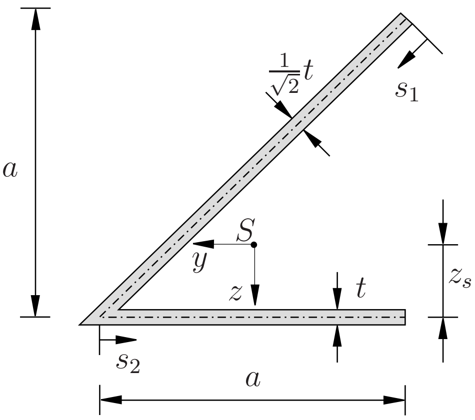
Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)

Ein als masselos anzunehmender Balken, bestehend aus einem dünnwandigen Profil ($t \ll a$), ist an der linken Seite eingespannt und wird an seinem rechten Ende durch eine Kraft F belastet, deren Wirklinie durch den Schubmittelpunkt verläuft. Die Abmessungen des Querschnitts sind der Abbildung zu entnehmen.



Schnitt $A - A$:



Der Abstand z_s des horizontalen Segments zum Schwerpunkt S ist für dieses System bereits zu $z_s = a/4$ berechnet worden und das Flächenträgheitsmoment I_y kann als bekannt angenommen werden.

Bestimmen Sie das statische Moment $S_y(s_1)$ bezüglich der Koordinate s_1 für den Teilbereich $0 \leq s_1 \leq \sqrt{2}\,a$. **(1,0 Punkte)**

$$S_y(s_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,t\,s_1\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\,s_1 - \frac{3}{4}a\right]$$

Bestimmen Sie das statische Moment $S_y(s_2)$ bezüglich der Koordinate s_2 für den Teilbereich $0 \leq s_2 \leq a$. **(1,0 Punkte)**

$$S_y(s_2) = -\frac{1}{4}\,t\,a^2 + \frac{1}{4}\,t\,a\,s_1$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

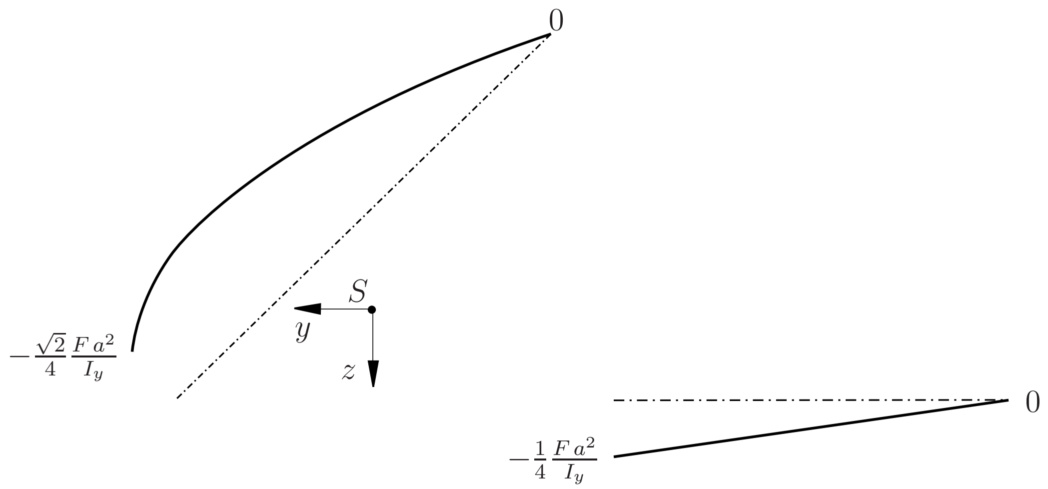
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Skizzieren Sie den Verlauf der **Schubspannung**, sodass der Polynomgrad erkenntlich wird. Das Profil wurde zur zeichnerischen Klarheit aufgetrennt. Tragen Sie dabei die Beträge der Werte für die Schubspannungen an den Stellen $s_1 = 0$, $s_1 = \sqrt{2}\,a$, $s_2 = 0$ und $s_2 = a$ in Abhängigkeit von F, a, t und I_y ein.

(2,0 Punkte)



Beschreiben Sie in Stichworten wie Sie die Stelle der betragsmäßig maximalen Schubspannung bestimmen können.

(1,0 Punkte)

Option 1: Auf Höhe des Schwerpunktes.
Option 2: τ ableiten nach s. Notwendige Bedingung überprüfen.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

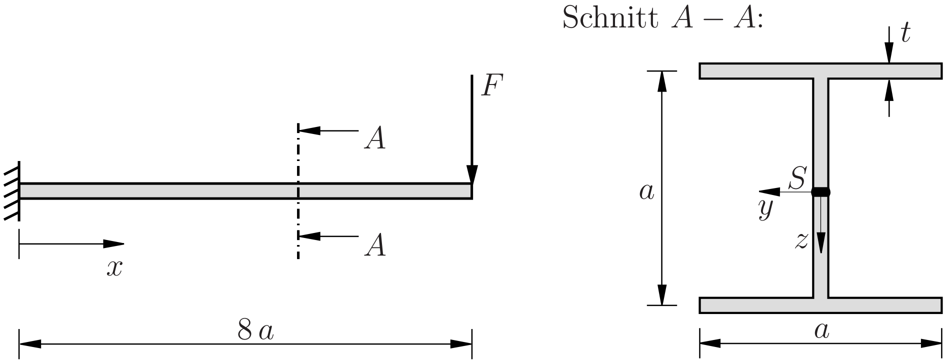
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

b)

Im Folgenden wird ein alternatives Profil betrachtet, welches aus zwei zusammengeschweißten T-Trägern besteht ($t \ll a$). Die Abmessungen sind der Abbildung zu entnehmen, die Dicke der Schweißnaht ist dabei zu vernachlässigen.

Schnitt $A - A$:



Des Weiteren wurde das Flächenträgheitsmoment des Querschnittes $I_y = \frac{1}{12}\, t\, a^3$, sowie die maximal auftretende Schubspannung im vertikalen Steg $\tau_{\max} = \frac{15}{2}\,\frac{F}{a\,t}$ und die minimal auftretende Schubspannung im Steg $\tau_{\min} = 6\,\frac{F}{a\,t}$ bereits berechnet. Die Wirklinie der Kraft F verläuft durch den Schubmittelpunkt.

Geben Sie die Werte für die Koordinaten x, y und z an, bei denen die betragsmäßig maximale Normalspannung zu erwarten ist. Bestimmen Sie anschließend die maximal auftretende Normalspannung.

(1,5 Punkte)

Koordinaten: $x = 0$, $z = \pm\,\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2} \leq y \leq \frac{a}{2}$
$\sigma^{\max} = 48\frac{F}{ta}$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

Betrachtet sei nun der Querschnitt an dessen x-Koordinate die maximale Normalspannung des Balkens vorliegt. Bestimmen Sie für diese x-Koordinate die Vergleichsspannung in der Mitte ($z = 0$), sowie am oberen Ende ($z < 0$) des Steges. Beachten Sie, dass Vergleichsspannungen für die Schweißnaht dabei nach Tresca, die Vergleichsspannungen des Trägermaterials nach von Mises bestimmt werden sollen.

(3,5 Punkte)

$z = 0$:
$\sigma_x = 0$ und $\tau = \frac{15}{2}\frac{Fa}{t}$
$\Rightarrow \sigma^{\mathrm{T}} = \sqrt{4\,\tau^2} = 15\frac{F}{at}$

$z = -\frac{a}{2}$:
$\sigma_x = -48\frac{F}{at}$ und $\tau = 6\frac{F}{at}$
$\Rightarrow \sigma^{\mathrm{M}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\,\tau^2} = \sqrt{2304 + 108}\frac{F}{at} = 49.112\frac{F}{at}$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

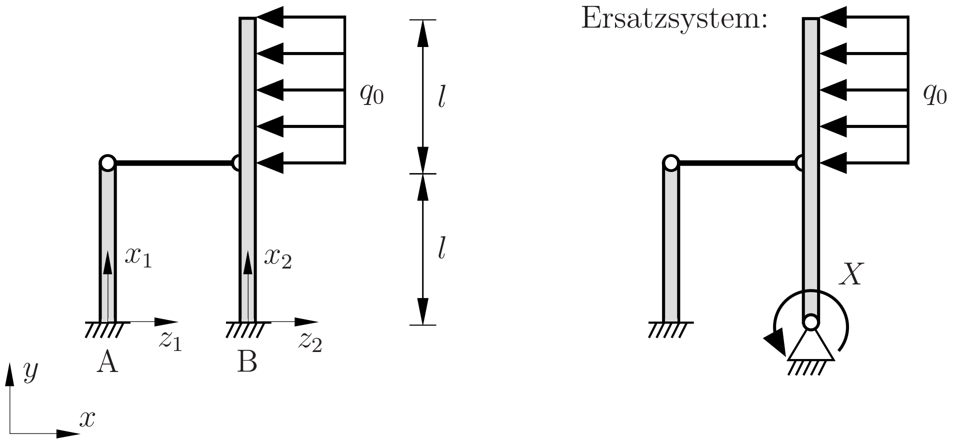
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 5)

a)

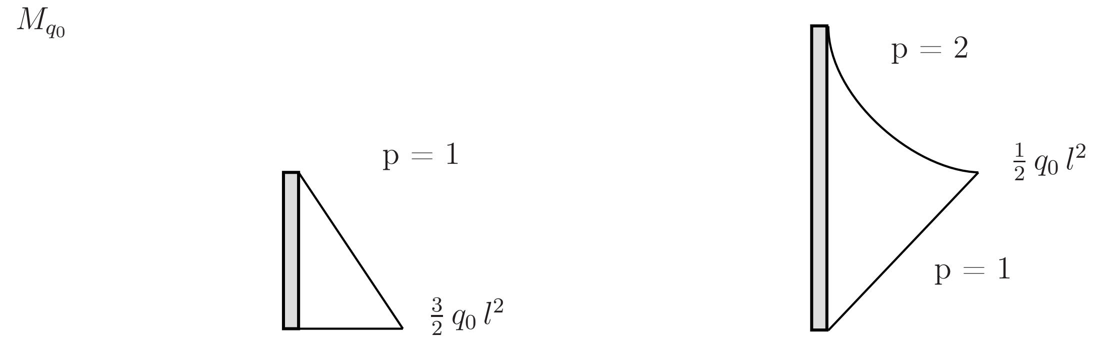
Die links abgebildeten Balken (Biegesteifigkeit EI) sind wie dargestellt gelagert und belastet. Sie sind durch einen starren Stab verbunden. Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit dem statisch überzähligen Auflagermoment X vorgegeben.



Für $X = 0$ ergeben sich die Lagerreaktionen im Ersatzsystem bezüglich der durch das vorgegebene Koordinatensystem als positiv definierten Richtungen an den Punkten A und B zu

$$A_y = 0, \quad A_x = \frac{3}{2}\,q_0\,l, \quad M_A = -\frac{3}{2}\,q_0\,l^2, \quad B_x = -\frac{1}{2}\,q_0\,l, \quad B_y = 0.$$

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M_{q_0} des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von q_0 und für $X = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus die jeweiligen Polynomgrade p der Funktionen an. (**3,0 Punkte**)



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

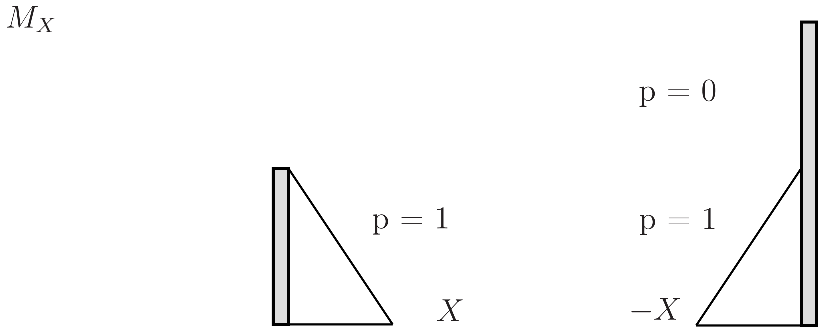
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 5)

Für $q_0 = 0$ ergeben sich die Lagerreaktionen im Ersatzsystem bezüglich der durch das vorgegebene Koordinatensystem als positiv definierten Richtungen an den Punkten A und B zu

$$A_y = 0, \quad A_x = \frac{X}{l}, \quad M_A = -X, \quad B_x = -\frac{X}{l}, \quad B_y = 0.$$

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M_X des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von X und für $q_0 = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus die jeweiligen Polynomgrade p der Funktionen an. **(1,5 Punkte)**



Geben Sie die im System gespeicherte Gesamtenergie Π als Summe einzelner Integrale an. Geben Sie dabei die konkreten Integrationsgrenzen an und verwenden Sie die allgemeinen Ausdrücke M_{q_0} sowie M_X für die Schnittgrößenfunktionen. Die tatsächlichen Funktionen der Schnittgrößen sollen hier **nicht** eingesetzt werden.
Anteile aus Normal- und Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen. **(1,5 Punkte)**

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{x_1=0}^{l} \frac{\left[M_{q_0}+M_X\right]^2}{\mathrm{EI}} \mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_{x_2=0}^{l} \frac{\left[M_{q_0}+M_X\right]^2}{\mathrm{EI}} \mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2}\int_{x_2=l}^{2l} \frac{{M_{q_0}}^2}{\mathrm{EI}} \mathrm{d}x_2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

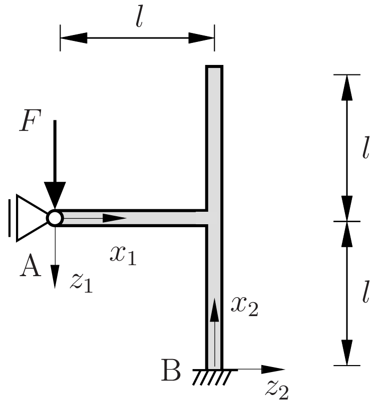
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

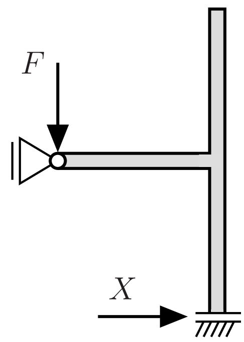
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 5)

b)
Der links abgebildete Rahmen (Dehnsteifigkeit EA, Biegesteifigkeit EI) ist wie dargestellt gelagert und belastet.
Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit der statisch überzähligen Auflagerkraft X vorgegeben. Beiträge aus Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen.



Ersatzsystem:



Die Funktionen der Biegemomente und der Normalkräfte sind wie folgt für das Ersatzsystem vorgegeben und auf der folgenden Seite dargestellt:

in Abhängigkeit von F für $X = 0$:

$M_F(x_1) = -F\,x_1$

$M_F(x_2) = -F\,l$ für $0 \leq x_2 \leq l$

$M_F(x_2) = 0$ für $l < x_2 \leq 2\,l$

$N_F(x_1) = 0$

$N_F(x_2) = -F$ für $0 \leq x_2 \leq l$

$N_F(x_2) = 0$ für $l < x_2 \leq 2\,l$

in Abhängigkeit von X für $F = 0$:

$M_X(x_1) = 0$

$M_X(x_2) = [l - x_2]\,X$ für $0 \leq x_2 \leq l$

$M_X(x_2) = 0$ für $l < x_2 \leq 2\,l$

$N_X(x_1) = X$

$N_X(x_2) = 0$ für $0 \leq x_2 \leq l$

$N_X(x_2) = 0$ für $l < x_2 \leq 2\,l$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

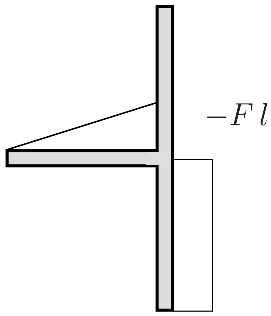
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

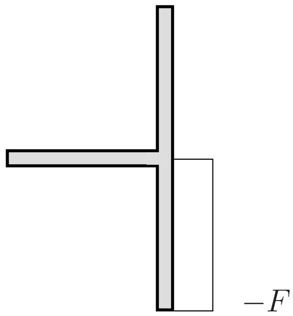
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 5)

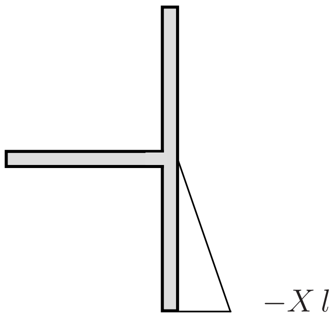
$M_F(x_i)$



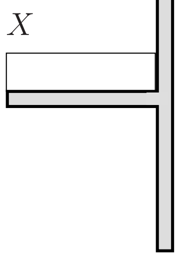
$N_F(x_i)$



$M_X(x_i)$



$N_X(x_i)$



Berechnen Sie die statisch überzählige Kraft X. Tragen Sie dazu die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis in das **Kästchen auf der nachfolgenden Seite** ein. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. **(4,0 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 5 von 5)

Lösung zu Aufgabenteil b):

Aus der Kompatibilitätsbedingung

$$w = \alpha_{10} + X\,\alpha_{11} \stackrel{!}{=} 0$$

mit Einflusszahlen

$$\alpha_{10} = \int_{x_2=0}^{l} \frac{M^0\,M^1}{EI}\mathrm{d}x_2 \quad = \quad \frac{1}{2}\,[-F\,l]\,[-X\,l]\,l\frac{1}{EI} \quad = \quad \frac{1}{2}F\,l^3\frac{1}{EI}$$

und

$$\begin{aligned} \alpha_{11} \quad &= \quad \int_{x_1=0}^{l} \frac{N^1\,N^1}{EI}\mathrm{d}x_1 + \int_{x_2=0}^{l} \frac{M^1\,M^1}{EA}\mathrm{d}x_2 \\ &= \quad l\,X\,X\,\frac{1}{EA} + \frac{1}{3}\,l\,\,[-X\,l]\,[-X\,l]\,\frac{1}{EI} \quad = \quad l\,\frac{1}{EA} + \frac{1}{3}\,l^3\frac{1}{EI} \end{aligned}$$

folgt

$$\boxed{X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = -\frac{\frac{1}{2}F\,l^3\frac{1}{EI}}{l\frac{1}{EA} + \frac{1}{3}l^3\frac{1}{EI}}}$$