TU Dortmund
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

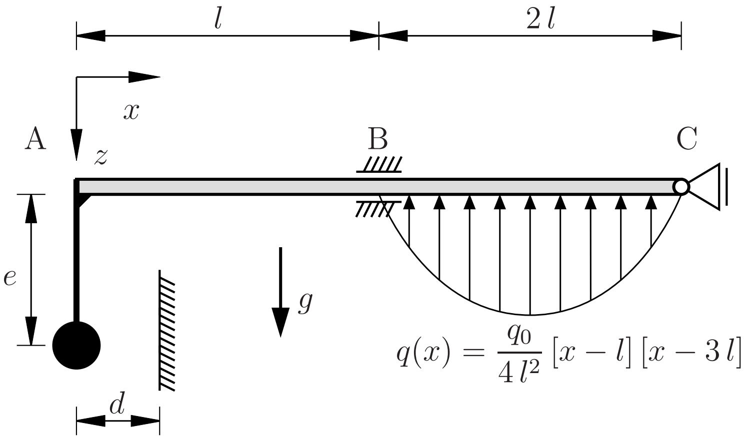
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Ein masseloser, dehnstarrer Balken (Biegesteifigkeit EI) wird im Schwerefeld der Erde durch eine Streckenlast $q(x)$ belastet. Im Punkt A ist ein starrer, masseloser Stab mit einer Masse (Radius r, Gewichtskraft $G = 3\,q_0\,l$) am Ende rechtwinklig angeschweißt.



Die in positive x-z-Koordinatenrichtung angenommenen Lagerreaktionen in den Punkten B und C wurden bereits bestimmt zu

$$B_z = -\frac{8}{3}\,q_0\,l\,, \quad M_B = -\frac{10}{3}\,q_0\,l^2\,, \quad C_x = 0\,.$$

a)

Berechnen Sie die Funktion der Biegelinie des Balkens zwischen den Punkten A und B. Sie dürfen **zwei** der dabei auftretenden Konstanten unbestimmt lassen. Geben Sie dazu nachfolgend die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis an. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. **(2,0 Punkte)**

z.B. $EI\,w_1(x)'' = -M_{y1}(x) = G\,x$

$EI\,w_1(x)' = \frac{1}{2}\,G\,x^2 + C_1$

$EI\,w_1(x) = \frac{1}{6}\,G\,x^3 + C_1\,x + C_2$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Geben Sie alle **dynamischen** Randbedingungen an den Punkten B und C an, die zur eindeutigen Bestimmung der Biegeline verwendbar sind. Machen Sie kenntlich auf welchen Bereich sich die verwendeten Funktionen beziehen. **(2,0 Punkte)**

Bereich 1: $0 < x < l$ Bereich 2: $l < x < 3\,l$

$$M_1(x = l) = M_2(x = l) + M_B \qquad M_2(x = 3\,l) = 0$$
$$Q_1(x = l) = Q_2(x = l) + B_z \qquad Q_2(x = 3\,l) = 0$$

c)

Geben Sie nun alle **kinematischen** Rand- und Übergangsbedingungen an, die zur eindeutigen Bestimmung der Biegelinien $w_i(x)$ erforderlich sind. Machen Sie kenntlich auf welchen Bereich sich die verwendeten Funktionen beziehen. **(1,0 Punkte)**

Bereich 1: $0 < x < l$ Bereich 2: $l < x < 3\,l$

$$w_1(x = l) = w_2(x = l) = 0$$
$$w_1'(x = l) = w_2'(x = l) = 0$$

d)

Für dieselbe Tragwerk-Konstruktion unter einer abweichenden und nicht näher spezifizierten Belastung sei die Biegelinie $w(x)$ durch

$$w(x) = \frac{q_0}{EI}\left[\frac{7\,x^5}{60\,l} + \frac{2\,x^3\,l}{27} - \frac{13\,x\,l^3}{24} + \frac{7\,l^4}{4}\right]$$

gegeben. Rechts des Punktes A soll im Abstand d eine Wand aufgestellt werden. Wie groß müsste in diesem Fall der Abstand d mindestens sein, sodass die Punktmasse (Radius r) die Wand nicht berührt. **(1,5 Punkte)**

$d > -\sin(w'(x = 0))\,e + r$ oder $d > -w'(x = 0)\,e + r$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

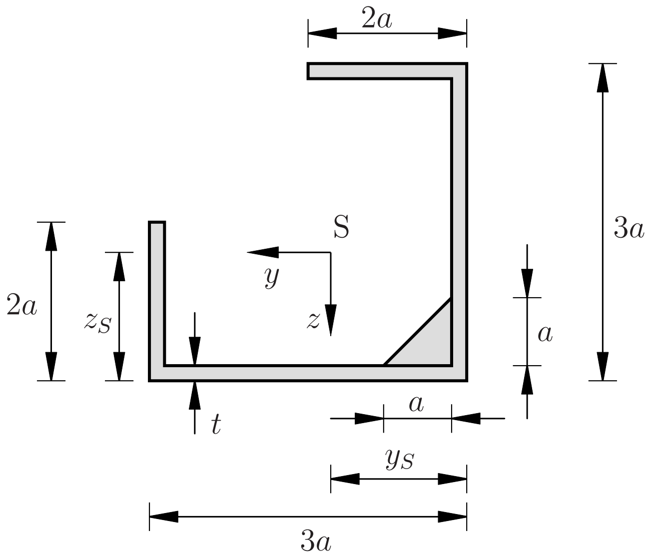
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

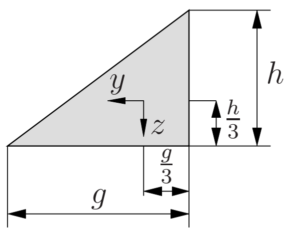
e)

Gegeben ist das Profil eines dünnwandigen Trägers, welches durch ein rechtwinkliges, gleichseitiges Dreieck verstärkt wurde. Der Träger besitzt eine konstante Profildicke $t \ll a$. Der Schwerpunkt S des Trägers sei bekannt und durch die Abstände y_S und z_S gegeben. Die weiteren Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen.



Hinweis: Die Flächenträgheitsmomente für ein wie folgt dargestelltes rechtwinkliges Dreieck sind:

$$I_y = \frac{g\,h^3}{36}\,, \qquad I_z = \frac{h\,g^3}{36}\,, \qquad I_{yz} = -\frac{g^2\,h^2}{72}\,.$$



Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment I_y des Trägers bezüglich des gegebenen y-z-Schwerpunktkoordinatensystems. Nutzen Sie aus, dass $t \ll a$ gilt. Fassen Sie die Terme nicht zusammen. **(3,5 Punkte)**

$$I_y = \frac{t\,[3a]^3}{12} + 3a\,t\,[\frac{1}{2}\,3a - z_S]^2 + \frac{t\,[2a]^3}{12} + 2a\,t\,[\frac{1}{2}\,2a - z_S]^2$$
$$+ 2a\,t\,[3a - z_S]^2 + 3a\,t\,z_S^2 + \frac{[a]^4}{36} + \frac{[a]^2}{2}\,[z_S - \frac{a}{3}]^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

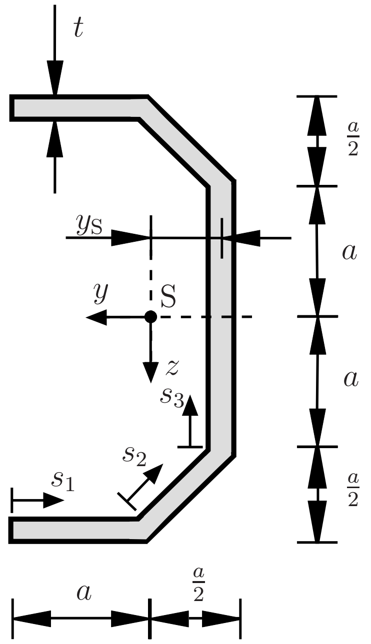
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 5)

In dem unten dargestellten dünnwandigem Profil (Dicke $t \ll a$) ist das Koordinatensystem im Schwerputnk S geeben. Die Querkraft Q_z wirke im Schubmittelpunkt in z-Richtung.



a)
Berechnen Sie die statischen Momente $S_y(s_1)$ bezüglich der Koordinate s_1 für den Teilbereich $0 \leq s_1 \leq a$ und $S_y(s_2)$ bezüglich der Koordinate s_2 für den Teilbereich $0 \leq s_2 \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$ des Profils. **(1,5 Punkte)**

$$S_y(s_1) = s_1\, t\, \frac{3\,a}{2}$$

$$S_y(s_2) = S_y(s_1 = a) + s_2\, t \left[\frac{3\,a}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\, s_2\right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 5)

b)
Bestimmen Sie den Schubmittelpunkt y_m für das Profil bei gegebener Belastung Q_z und gegebenem Flächenträgheitsmoment I_y **ohne** die statischen Momente zu spezifizieren. Geben Sie die wichtigsten Zwischenschritte ebenfalls im nachfolgenden Kästchen ein.
(**2,5 Punkte**)

$$
\begin{aligned}
Q\,[y_\mathrm{m} - y_\mathrm{S}] &= 2\,F_1\,\frac{3\,a}{2} + 2\,F_2\,\frac{a}{\sqrt{2}} \\
&= 3\,a\int_0^a \tau_1\,t\,\mathrm{d}s_1 + \sqrt{2}\,a\int_0^{\frac{\sqrt{2}\,a}{2}} \tau_2\,t\,\mathrm{d}s_2 \\
&= 3\,a\int_0^a \frac{Q\,S_y(s_1)}{I_y}\,\mathrm{d}s_1 + \sqrt{2}\,a\int_0^{\frac{\sqrt{2}\,a}{2}} \frac{Q\,S_y(s_2)}{I_y}\,\mathrm{d}s_2
\end{aligned}
$$

oder

$$
Q\,y_m = 2\,F_1\,\frac{3\,a}{2} + 2\,F_2\left[\frac{a + y_\mathrm{S}}{\sqrt{2}}\right] + F_3\,y_\mathrm{S}
$$

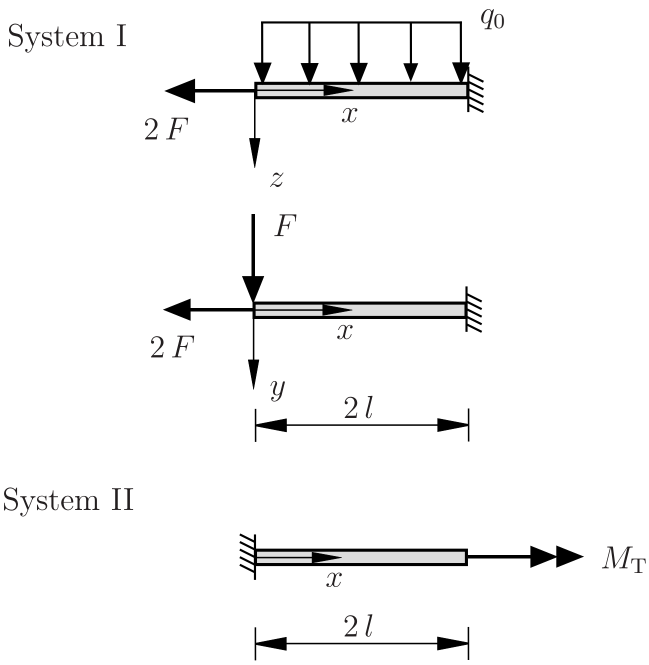
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 5)

Es soll nun der nachfolgende Träger mit dünnwandigen Profil (Dicke $t \ll a$) hinsichtlich verschiedener dreidimensionaler Belastungen untersucht werden. Der Flächeninhalt beträgt $A = 7\,a\,t$.



c)
Berechnen Sie den Normalspannungsverlauf als Funktion von x, y, z für die gegebene Belastung des Systems I, wobei die Flächenträgheitsmomente I_y und I_z als bekannt anzunehmen sind. **(1,5 Punkte)**

$$\sigma(x, y, z) = -\frac{q_0\,x^2}{2\,I_y}\,z - \frac{F\,x}{I_z}\,y + \frac{2\,F}{7\,a\,t}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

d)
Leiten Sie eine Bedingung für das Torsionsmoment M_T des Systems II her, sodass die zulässige Schubspannung τ_zul nicht überschritten wird. (**1,0 Punkte**)

$$\tau_\mathrm{max} = \frac{6\,M_\mathrm{T}}{25\,a\,t^2} \leq \tau_\mathrm{zul}$$

e)
Nennen Sie zwei Maßnahmen um das maximal zulässige Torsionsmoment zu erhöhen. (**1,0 Punkte**)

Geometrie des Profils ändern
Werkstoff verändern

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

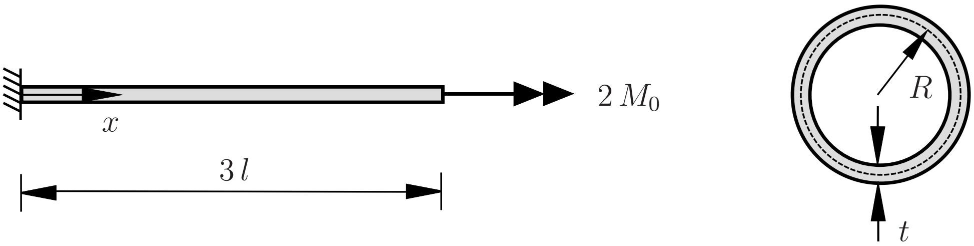
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 5 von 5)

f)

Im Folgenden wird nun ein einseitig eingespanntes Rohr (Dicke $t \ll R$) betrachtet, welches mit einem konstanten Torsionsmoment von $2\,M_0$ belastet wird.



Berechnen Sie die Verdrehung an der Stelle $x = 3\,l$. Der Schubmodul G sei bekannt.

Bestimmen Sie zudem die Verdrehung an der Stelle $x = 3\,l$, wenn das Rohr im letzten Drittel einen Längsriss besitzt, dh. im letzten Drittel an einer Querschnittsstelle über die komplette Dicke t in x-Richtung geschlitzt ist. Geben Sie alle relevanten Zwischenschritte ebenfalls im folgenden Kästchen an. **(2,5 Punkte)**

$$\vartheta_I(x) = \frac{2\,M_0}{G\,I_\mathrm{T}^\circ}\,x$$

$$\vartheta_I(x = 3\,l) = \frac{6\,M_0\,l}{G\,I_\mathrm{T}^\circ}$$

$$\vartheta_{II}(x) = \frac{2\,M_0}{G\,I_\mathrm{T}^c}\,x + c_1$$

$$\vartheta_I(x = 2\,l) = \vartheta_{II}(x = 2\,l) \Rightarrow c_1 = \frac{4\,M_0\,l}{G\,I_\mathrm{T}^\circ} - \frac{4\,M_0\,l}{G\,I_\mathrm{T}^c}$$

$$\vartheta_{II}(x = 3\,l) = \frac{2\,M_0\,l}{G\,I_\mathrm{T}^c} + \frac{4\,M_0\,l}{G\,I_\mathrm{T}^\circ}$$

mit

$$I_\mathrm{T}^\circ = 2\,\pi\,R^3\,t$$

$$I_\mathrm{T}^c = \frac{2\,\pi}{3}\,R\,t^3$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

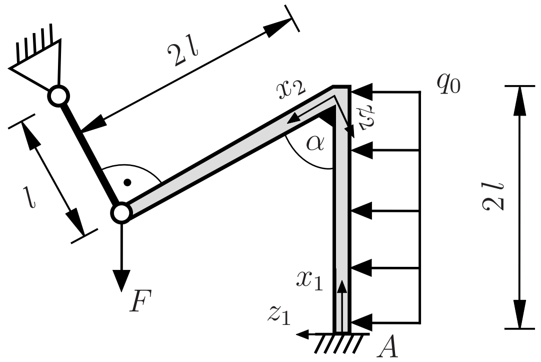
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

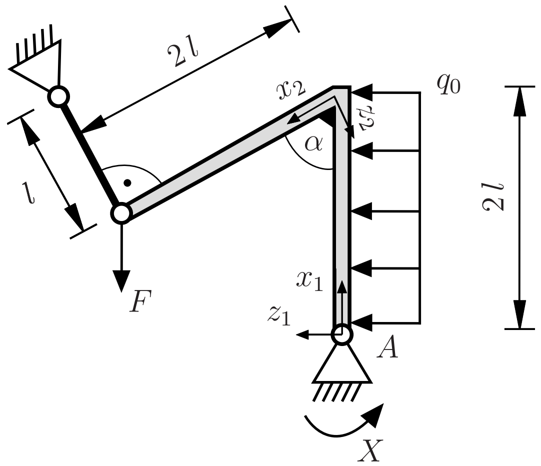
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

a)
Das nebenstehende, statisch unbestimmte System besteht aus einem Rahmen (Biegesteifigkeit EI, Dehnsteifigkeit EA_1) und einem Stab (Dehnsteifigkeit EA_2). Das System ist durch eine Kraft F und durch eine konstante Streckenlast mit dem Betrag q_0 belastet. Die Lagerung des Systems sowie alle Abmessungen sind der Skizze zu entnehmen.



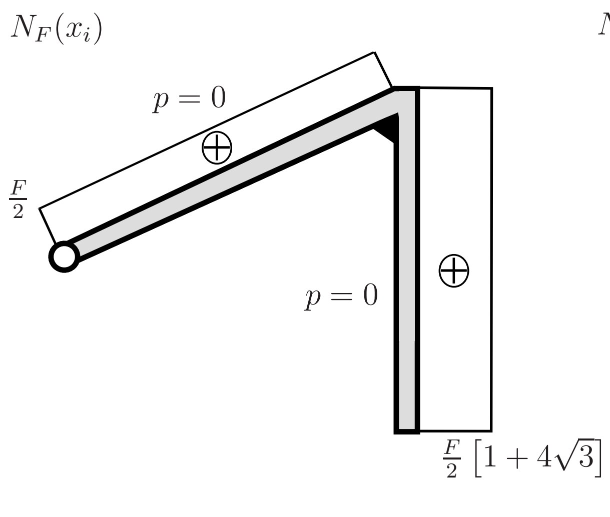
Ein statisch bestimmtes Ersatzsystem ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt. Dabei wurde die feste Einspannung in A durch ein Festlager ersetzt und das statisch überzählige Moment X eingeführt.

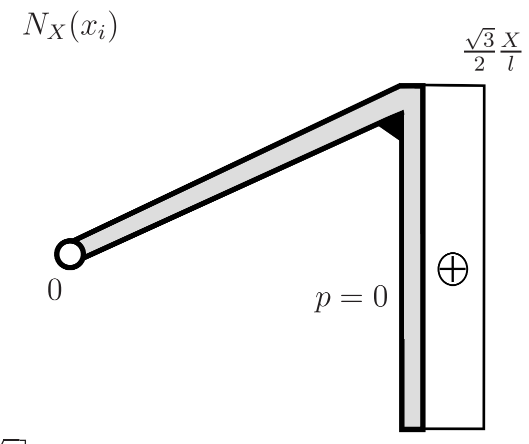


Im Folgenden wird der Zusammenhang $q_0 = \frac{2F}{l}$ für die Streckenlast angenommen und der Winkel zu $\alpha = \frac{\pi}{3}$ festgelegt. Unter Berücksichtigung dieser Angaben ist die Stabkraft S_F für das „0“-System (für $X = 0$ und $F \neq 0$) sowie S_X für das „1“-System (für $F = 0$ und $X \neq 0$) zu

$$S_F = F\left[4 + \sqrt{3}\right], \quad S_X = \frac{X}{l}$$

berechnet worden. Die grafische Darstellung der Normalkraft- und Biegemomentenverläufe ergibt sich für die beiden Systeme zu





TU Dortmund

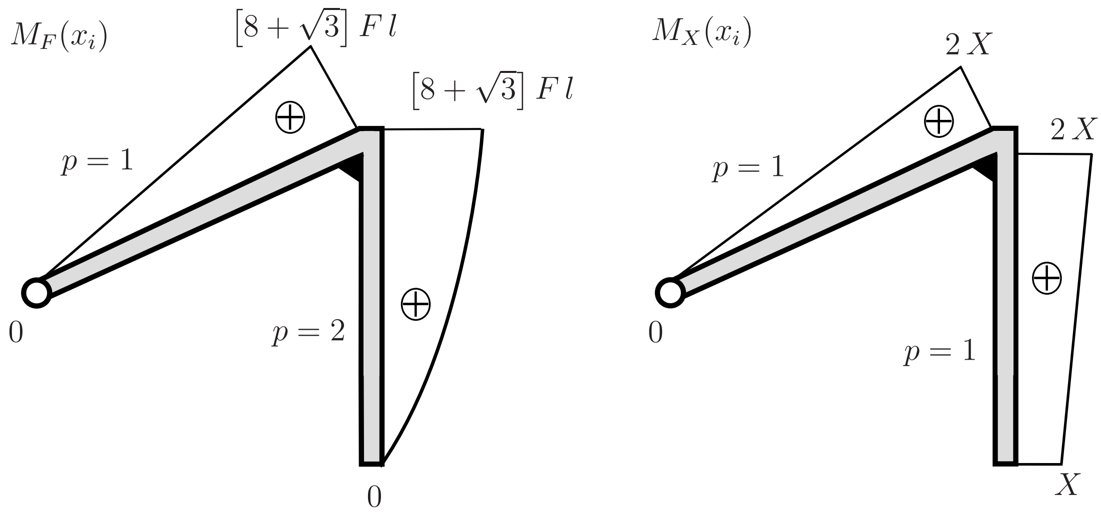
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)



Berechnen Sie mithilfe dieser Verläufe die statisch überzählige Kraft X. Beiträge aus Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen. Tragen Sie die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis in das nachfolgende Kästchen ein. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. Die Ergebnisse sollen **nicht** vereinfacht werden. **(5,5 Punkte)**

$X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}$
mit

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} = &\frac{1}{EA_1}\left[2\,l\,\frac{F}{2}\left[1+4\sqrt{3}\right]\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{l}\right]\\
&+\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{12}\,2\,l\left[\left[8+\sqrt{3}\right]F\,l\right]\left[3\,[1]+5\,[2]\right]\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{3}\,2\,l\left[\left[8+\sqrt{3}\right]F\,l\right][2]\right]\\
&+\frac{1}{EA_2}\left[l\left[4+\sqrt{3}\right]F\,\frac{1}{l}\right]\\
\alpha_{11} = &\frac{1}{EA_1}\,2\,l\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{l}\right]^2\\
&+\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}\,2\,l\left[2\,l\,[1]^2+2\,l\,[2]^2+2\,l\,[1]\,[2]\right]+\frac{1}{3}\,2\,l\,[2]^2\right]\\
&+\frac{1}{EA_2}\left[l\left[\frac{1}{l}\right]^2\right]
\end{aligned}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

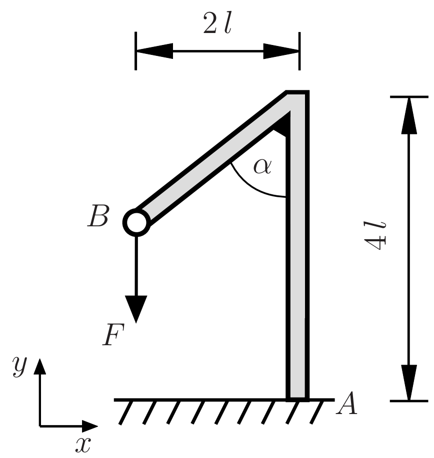
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

b)
In der nebenstehenden Skizze ist ein anderes System dargestellt, welches aus einem **dehnstarren** Rahmen (Biegesteifigkeit EI) besteht. Alle Abmessungen sind der Skizze zu entnehmen. Das System wird durch die vertikale Kraft F im Punkt B belastet. Die in positive Koordinatenrichtung angenommenen Lagerreaktionen im Punkt A wurden bereits zu

$$A_x = 0, \quad A_y = F, \quad M_A = -2\,F\,l$$

bestimmt. Beiträge aus Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen.



Bestimmen Sie die im dargestellten System gespeicherte Formänderungsenergie Π in Abhängigkeit der gegebenen Größen. **(2,5 Punkte)**

$$\Pi = \frac{4}{3}\frac{F^2\,l^3}{E\,I}\left[\frac{1}{\sin(\alpha)} + 6\right]$$

Berechnen Sie den Betrag u_F, um welchen sich der Kraftangriffspunkt in Richtung der Kraft F verschiebt. **(0,5 Punkte)**

$$u_F = \frac{8}{3}\frac{F\,l^3}{E\,I}\left[\frac{1}{\sin(\alpha)} + 6\right]$$

Bestimmen Sie, wie groß der Betrag der Kraft F maximal sein darf, sodass der Abstand zwischen Punkt B und dem Boden den Wert $d_{\min}$ nicht unterschreitet. **(1,0 Punkte)**

$$F \leq \frac{\frac{3}{8}E\,I}{l^3}\frac{l\left[4-\frac{2}{\tan(\alpha)}\right]-d_{\min}}{\frac{1}{\sin(\alpha)}+6}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Für das System soll nun ein anderes Material mit kleinerem E-Modul verwendet werden. Mit welcher konstruktiven Maßnahme könnte man die zuvor genannte Bedingung, dass der Abstand zwischen Punkt B und dem Boden den Wert d_{min} nicht unterschreitet, dennoch erfüllen? Die Kraft F sowie die geometrischen Größen l und α sollen dabei unverändert bleiben. **(0,5 Punkte)**

Anderes Profil mit größerem Flächenträgheitsmoment ; Versteifung durch weiteren Stab ; etc.