TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

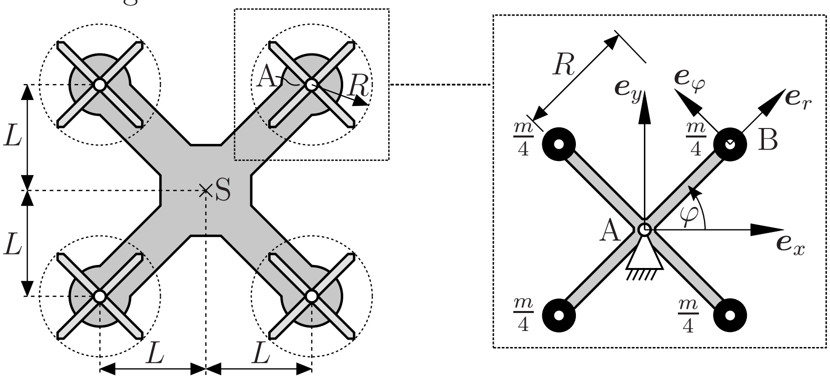
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 1** (Seite 1 von 3)

Die Rotoren der unten links schematisch abgebildeten Drohne sollen ausgelegt werden. Dazu wird das unten rechts gezeigte Ersatzsystem für einen der Rotoren gebildet. Es wird angenommen, dass die gesamte Masse $m$ des Rotors in Form von vier Punktmassen drehbar am äußeren Rand einer masselosen, starren Halterung befestigt ist (Abstand $R$ zum Punkt A, jeweils Masse $\frac{m}{4}$). Aufgrund der Symmetrie soll im Folgenden nur die Masse in Punkt B betrachtet werden. Die Drohne befindet sich zunächst in Ruhe, d.h. der Punkt A kann als raumfest angenommen werden.




a)
Aus der Ruhelage $\varphi = 0$ wird durch den Motor eine konstante Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi} = K$ des Rotors erzeugt. Bestimmen Sie zunächst die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ in Abhängigkeit des Winkels $\varphi$. **(1,0 Punkte)**

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{2K\varphi}$$

Bestimmen Sie nun, ebenfalls in Abhängigkeit des Winkels $\varphi$, die Komponenten der im Punkt B zwischen der Punktmasse und der Halterung übertragenen Reaktionskraft $\boldsymbol{F}$ in Richtung von $\boldsymbol{e}_r$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$, sowie die Amplitude der Kraft $\boldsymbol{F}$.
**Hinweis:** Die Komponenten der Reaktionskraft sollen *an der Punktmasse* in positive Koordinatenrichtung angetragen werden. **(2,5 Punkte)**

$$F_r = -\tfrac{1}{2} mRK\varphi$$

$$F_\varphi = \tfrac{1}{4} mRK$$

$$\|\boldsymbol{F}\| = \tfrac{1}{4} mRK\sqrt{1+4\varphi^2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 1** (Seite 2 von 3)

b)
Durch eine Messung werden die Funktionen für den Betrag der Reaktionskraft $\boldsymbol{F}$ sowie den Winkel $\varphi$ in Abhängigkeit der Zeit $t$ näherungsweise zu

$$F\,(t) = F_0\left[1 - e^{-b\,t}\right]\ ,\quad \varphi\,(t) = \frac{1}{6}\,c\,t^3$$

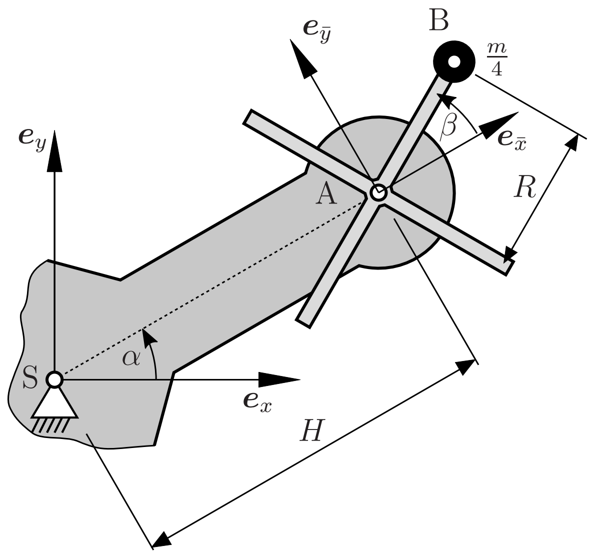
bestimmt. Bestimmen Sie den Zeitpunkt $t_{\mathrm{krit}}$, zu dem die Reaktionskraft den gegebenen kritischen Wert $F_{\mathrm{krit}} = \frac{1}{2}F_0$ erreicht.
**Hinweis:** Der oben genannte Zusammenhang $\ddot{\varphi} = K$ gilt hier nicht mehr. (**1,0 Punkte**)

$t_{\mathrm{krit}} = \frac{\ln 2}{b}$

Die Konstanten wurden bei der Messung zu $b = 0,195\,\mathrm{s}^{-1}$ und $c = 6,283\,\mathrm{s}^{-3}$ bestimmt. Wie viele *vollständige* Umdrehungen (Anzahl $n$) führt der Rotor aus, bevor die Reaktionskraft den kritischen Wert erreicht? Runden Sie bei der Berechnung von Zwischenergebnissen auf mindestens drei Nachkommastellen. (**1,0 Punkte**)

$n = 7$

c)
Es soll nun untersucht werden, wie sich eine Drehung der Drohne um ihren Schwerpunkt S auf die Geschwindigkeit und Beschleunigung der Punktmasse am Ende des Rotors (Punkt B) auswirkt. Dazu wird das nebenstehende Ersatzsystem verwendet. Die Drohne dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha} = \Omega$ um ihren Schwerpunkt S. Zusätzlich dreht sich der Rotor mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\beta} = \omega$ um den Befestigungspunkt an der Drohne $A$. Das eingezeichnete $\bar{x}$-$\bar{y}$-Koordinatensystem dreht sich mit der Drohne mit (Winkel $\alpha$ zwischen $\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{e}_{\bar{x}}$).



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Für den gezeigten Zustand des Systems ($\alpha$ und $\beta$ können als bekannt vorausgesetzt werden) sollen Geschwindigkeit und Beschleunigung der Masse in Punkt B bestimmt werden. Verwenden Sie bei der Anwendung der Formeln für die Relativkinematik das vorgegebene $\bar{x}$-$\bar{y}$-Koordinatensystem als bewegtes Bezugssystem.
**Hinweis:** Beachten Sie die dadurch eindeutig bestimmte Aufteilung in Führungs-, Coriolis- und Relativanteile der Bewegungsgrößen.

Bestimmen Sie den Vektor der Führungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{B}}$. Geben Sie den Vektor in der Form $\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{B}} = \ldots\, \boldsymbol{e}_{\bar{x}} + \ldots\, \boldsymbol{e}_{\bar{y}}$ im $\bar{x}$-$\bar{y}$-Koordinatensystem an. **(1,5 Punkte)**

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{B}} = -\Omega R \sin\beta \boldsymbol{e}_{\bar{x}} + \Omega \left[H + R\cos\beta\right] \boldsymbol{e}_{\bar{y}}$$

Bestimmen Sie den Vektor der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Rel}}^{\mathrm{B}}$. Geben Sie den Vektor in der Form $\boldsymbol{v}_{\mathrm{Rel}}^{\mathrm{B}} = \ldots\, \boldsymbol{e}_{\bar{x}} + \ldots\, \boldsymbol{e}_{\bar{y}}$ im $\bar{x}$-$\bar{y}$-Koordinatensystem an. **(1,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{Rel}}^{\mathrm{B}} = -\omega R \sin\beta \boldsymbol{e}_{\bar{x}} + \omega R \cos\beta \boldsymbol{e}_{\bar{y}}$$

Bestimmen Sie den Vektor der Führungsbeschleunigung $\boldsymbol{a}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{B}}$. Geben Sie den Vektor in der Form $\boldsymbol{a}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{B}} = \ldots\, \boldsymbol{e}_{\bar{x}} + \ldots\, \boldsymbol{e}_{\bar{y}}$ im $\bar{x}$-$\bar{y}$-Koordinatensystem an. **(2,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{B}} = -\Omega^2 \left[H + R\cos\beta\right] \boldsymbol{e}_{\bar{x}} - \Omega^2 R \sin\beta \boldsymbol{e}_{\bar{y}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

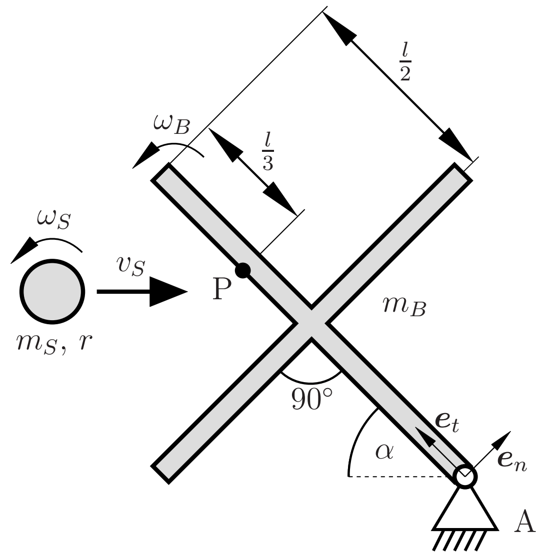
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

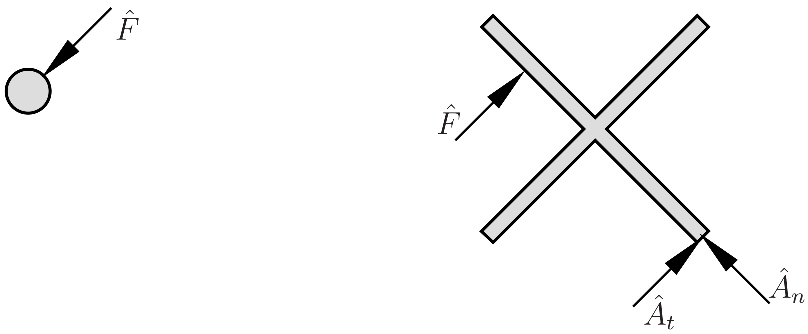
Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 2** (Seite 1 von 3)

a)
Das nebenstehende System besteht aus einer Kreisscheibe und einer in Punkt A drehbar gelagerten Balkenkonstruktion der Gesamtmasse $m_B$. Die vier Arme (Länge jeweils $l/2$) stehen senkrecht aufeinander und sind als dünn anzunehmen. Die Scheibe trifft die Balkenkonstruktion in Punkt P im Zustand $\alpha = 45°$. Unmittelbar vor dem Stoß ist die Schwerpunktsgeschwindigkeit der Kreisscheibe mit $v_S$ und die Winkelgeschwindigkeit mit $\omega_S$ gegeben. Die Winkelgeschwindigkeit der Balkenkonstruktion beträgt zum selben Zeitpunkt $\omega_B$. Die Oberflächen beider Körper sind als ideal glatt anzunehmen. Sämtliche Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen.




Tragen Sie sämtliche wirkenden Kraftstöße in die nachfolgende Skizze ein. (**1,0 Punkte**)




Geben Sie das Massenträgheitsmoment $\Theta_B^A$ der Balkenkonstruktion bezogen auf den Punkt A an. (**1,0 Punkte**)

$\Theta_\mathrm{B}^\mathrm{A} = \frac{1}{3}\, m_B\, l^2$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 2** (Seite 2 von 3)

Geben Sie die notwendigen Impulsbilanzen und Bedingungen an, um die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}}_S = \bar{v}_{S,n}\,\boldsymbol{e}_n + \bar{v}_{S,t}\,\boldsymbol{e}_t$ und die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}_S$ der Kreisscheibe sowie die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}}_B = \bar{v}_{B,n}\,\boldsymbol{e}_n + \bar{v}_{B,t}\,\boldsymbol{e}_t$ und die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}_B$ der Balkenkonstruktion nach dem Stoß zu bestimmen.
**Hinweis:** Die Gleichungen sind nicht zu lösen. **(4,0 Punkte)**

$$e = -\frac{\bar{v}_{S,n} + \frac{2}{3}\,\bar{\omega}_B\,l}{\frac{\sqrt{2}}{2}\,v_S + \frac{2}{3}\,\omega_B\,l} \tag{1}$$

$$\sum \hat{F}_n = m_S\,[\bar{v}_{S,n} - \frac{\sqrt{2}}{2} v_S] = -\hat{F} \tag{2}$$

$$\sum \hat{F}_t = m_S\,[\bar{v}_{S,t} + \frac{\sqrt{2}}{2} v_S] = 0 \tag{3}$$

$$\sum \hat{M} = \frac{1}{2} m_s\,r^2\,[\bar{\omega}_S - \omega_S] = 0 \tag{4}$$

$$\sum \hat{M} = \Theta_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}\,[\bar{\omega_B} - \omega_B] = -\frac{2}{3}\,\hat{F}\,l \tag{5}$$

$$\bar{v}_{B,n} = -\bar{\omega}_B\,\frac{l}{2} \tag{6}$$

$$\bar{v}_{B,t} = 0 \tag{7}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

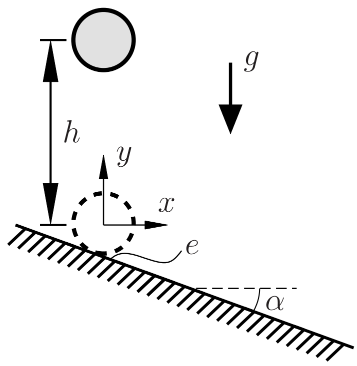
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 2** (Seite 3 von 3)

b)
Das nebenstehende System befindet sich im Schwerefeld der Erde (Beschleunigung $g$). Es besteht aus einer Scheibe, die aus der Höhe $h$ auf die schiefe Ebene (Neigungswinkel $\alpha$) fällt. Nehmen Sie beim Stoß zwischen den ideal glatten Körpern die Stoßzahl $e$ an.




Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{v}_x\,\boldsymbol{e}_x + \bar{v}_y\,\boldsymbol{e}_y$ der Scheibe unmittelbar nach dem Stoß in Abhängigkeit des gegebenen $x$-$y$-Koordinatensystems. **(2,0 Punkte)**

$$\bar{v}_x = \sqrt{2\,g\,h}\,\sin(\alpha)\cos(\alpha)\,[1+e]$$

$$\bar{v}_y = \sqrt{2\,g\,h}\,[\cos^2(\alpha)\,e - \sin^2(\alpha)]$$

c)
Bestimmen Sie für das System aus Aufgabenteil b) die Position $\boldsymbol{p} = p_x\,\boldsymbol{e}_x + p_y\,\boldsymbol{e}_y$ des Mittelpunkts der Scheibe beim zweiten Aufprall mit der schiefen Ebene in Abhängigkeit des gegebenen $x$-$y$-Koordinatensystems. Nehmen Sie die Geschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}} = \bar{v}_x\,\boldsymbol{e}_x + \bar{v}_y\,\boldsymbol{e}_y$ unmittelbar nach dem ersten Stoß als bekannt an. **(2,0 Punkte)**

$$p_x = \frac{2\,\bar{v}_x}{g}[\bar{v}_y + \tan(\alpha)\,\bar{v}_x]$$

$$p_y = \frac{2\,\bar{v}_y}{g}\,[\bar{v}_y + \tan(\alpha)\,\bar{v}_x] - \frac{2}{g}\,[\bar{v}_y + \tan(\alpha)\,\bar{v}_x]^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

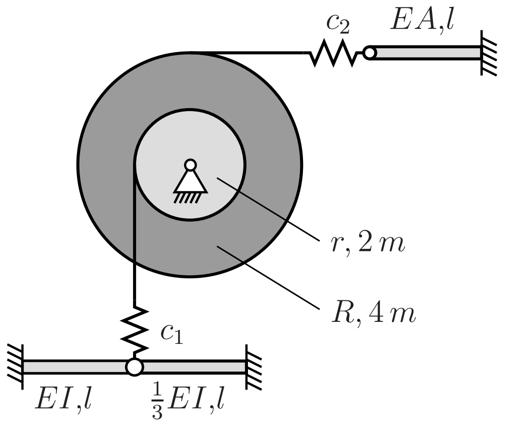
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 3** (Seite 1 von 3)

Eine Stufenrolle, bestehend aus zwei fest verbundenen Scheiben (Radien $r$ und $R$, Massen $2\,m$ und $4\,m$) ist wie dargestellt gelagert. Am unteren Ende befindet sich eine elastische Struktur bestehend aus zwei gelenkig verbundenen Balken (Biegesteifigkeiten $EI$, $\frac{1}{3}\,EI$, Länge jeweils $l$) und einer Feder (Federsteifigkeit $c_1$). Am rechten Ende befindet sich eine elastische Struktur bestehend aus einem Stab (Dehnsteifigkeit $EA$, Länge $l$) und einer Feder (Federsteifigkeit $c_2$).

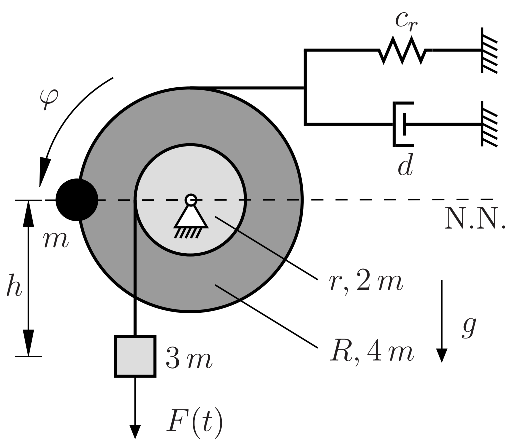



a)

Berechnen Sie die Ersatzfedersteifigkeiten für die elastischen Strukturen am unteren ($c_u^{\text{ers}}$) und am rechten ($c_r^{\text{ers}}$) Ende des Systems. **(1,5 Punkte)**

$$c_u^{\text{ers}} = \frac{4\,EI\,c_1}{l^3\,c_1 + 4\,EI} \qquad c_r^{\text{ers}} = \frac{c_2\,EA}{EA + c_2\,l}$$

Im Folgenden ist die Stufenrolle wie dargestellt gelagert. Eine Feder (Federsteifigkeit $c_r$) und ein Dämpfer (Dämpferkonstante $d$) sind über ein Seil mit der großen Scheibe verbunden, eine Punktmasse (Masse $3\,m$) und eine zeitabhängige Kraft $F(t)$ über ein anderes Seil mit der kleinen Scheibe. Zusätzlich befindet sich eine Punktmasse (Masse $m$) auf dem Rand der großen Scheibe. Es wirkt die Erdbeschleunigung $g$, die Seile sind auf die Scheiben aufgerollt und stets gespannt. Die Feder ist in der dargestellten Lage entspannt.




b)

Bestimmen Sie, für große Auslenkungen des Systems, die potentielle Energie $E_{\text{pot}}$ in Abhängigkeit der Koordinate $\varphi$, bezogen auf das Nullniveau N.N. **(1,5 Punkte)**

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\,c_r\,(\varphi\,R)^2 - m\,g\,\sin(\varphi)\,R - 3\,m\,g\,(h + \varphi\,R)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 3** (Seite 2 von 3)

Bestimmen Sie die kinetische Energie $E_{\text{kin}}$ des gesamten Systems in Abhängigkeit der Koordinate $\varphi$. **(1,5 Punkte)**

$$E_{\text{kin}} = \left[\frac{3}{2}\, m\, R^2 + 2\, m\, r^2\right]\, \dot{\varphi}^2$$

Bestimmen Sie die virtuelle Arbeit $\delta W$ der nichtkonservativen Kräfte des Systems in Abhängigkeit der Koordinate $\varphi$. **(1,0 Punkte)**

$$\delta\, W = \left[F(t)\, r - d\, R^2\, \dot{\varphi}\right]\, \delta\varphi$$

c)

Für ein anderes, nicht näher spezifiziertes, System ergeben sich die Energien sowie die nichtkonservativen Kräfte zu

$$\begin{aligned}
E_{\text{pot}} &= -3\, c\, L^2 \left[1 + \cos(\phi)^2\right], \\
E_{\text{kin}} &= 2\, m\, L^2\, \dot{\phi}^2, \\
Q_D &= -4\, \frac{L^3\, d}{r}\, \dot{\phi}, \\
Q_F &= 3\, L\, F(t) \sin(\phi)^2.
\end{aligned}$$

Geben Sie die Bewegungs-Differentialgleichung bezüglich des Drehwinkels $\phi$ für große Auslenkungen des Systems an. **(1,5 Punkte)**

$$-6\, c\, L^2 \cos(\phi) \sin(\phi) - 4\, m\, L^2 \ddot{\phi} = 4\, \frac{L^3\, d}{r}\, \dot{\phi} - 3\, L\, F(t)\, \sin(\phi)^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 3** (Seite 3 von 3)

Geben Sie die linearisierte Form der gegebenen Bewegungs-Differentialgleichung für kleine Auslenkungen um die Ausgangslage ($\phi = 0, \dot{\phi} = 0, \ddot{\phi} = 0$) an. **(1,0 Punkte)**

$$-6\,c\,L^2\phi - 4\,m\,L^2\ddot{\phi} = 4\,\frac{L^3\,d}{r}\,\dot{\phi}$$

Bestimmen Sie die Eigenfrequenz $\omega_0$ und den Abklingkoeffizienten $\delta$. **(1,0 Punkte)**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{c}{m}} \qquad \delta = \frac{1}{2}\frac{L}{r\,m}\,d$$

Nennen Sie die Bedingung für die Federkonstante $c$, so dass sich eine stark gedämpfte Schwingung ergibt. **(1,0 Punkte)**

$$c < \frac{1}{6}\frac{L^2}{r^2\,m}\,d^2$$