Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

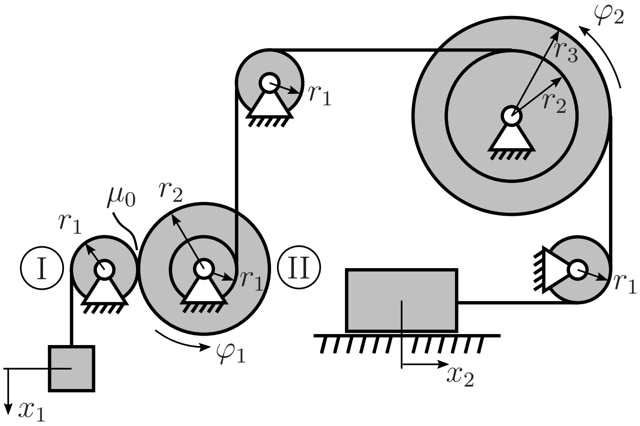
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)

Für das hier abgebildete System sollen die kinematischen Bindungen bestimmt werden. Die Rolle I rollt schlupffrei auf der Stufenrolle II ab. Die Seile, welche auf den beiden Rollen I und II aufgerollt sind, sind nicht miteinander verbunden. Es kann angenommen werden, dass beide Seile stets gespannt bleiben. Beachten Sie bei der Bearbeitung die eingezeichneten Freiheitsgrade sowie daraus resultierende Vorzeichen.



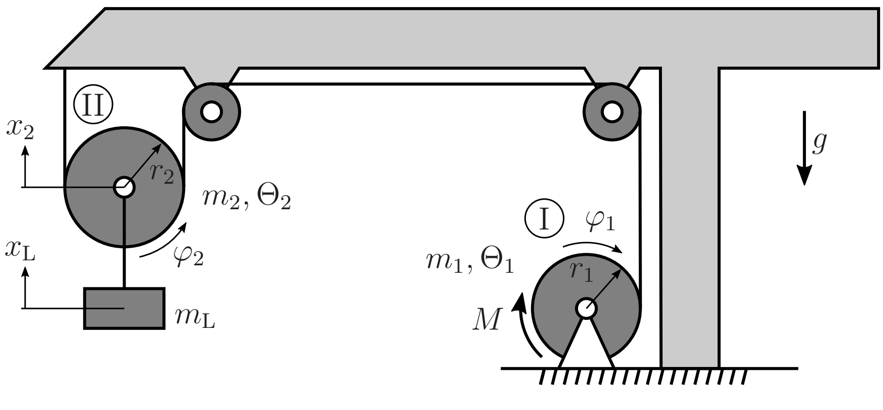
Bestimmen Sie die kinematischen Bindungen $\dot{\varphi}_1(\dot{x}_1)$ und $\dot{x}_2(\dot{\varphi}_1)$. **(2,5 Punkte)**

$$\dot{\varphi}_1(\dot{x}_1) = -\frac{\dot{x}_1}{r_2}$$

$$\dot{x}_2(\dot{\varphi}_1) = -\frac{r1\,r3}{r_2}\dot{\varphi}_1$$

b)

Die folgende Abbildung zeigt ein einfaches Modell für einen Kran. Die Masse m_L ist an der Rolle II aufgehängt und wird über einen Seilzug von einem Motor angehoben, der an der Rolle I das Drehmoment M einleitet. Die beiden mittleren Umlenkrollen können als masselos betrachtet werden und sind fest mit dem Kran verbunden, während die restlichen Systemgrößen sowie Koordinatensysteme aus der Zeichnung zu entnehmen sind. Die gegebenen Massenträgheitsmomente Θ_1 und Θ_2 beziehen sich jeweils auf den Mittelpunkt der Rollen.



Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

Die folgenden kinematischen Bindungen gelten für das System:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_\mathrm{L}\ , \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}_\mathrm{L}}{r_2}\ , \quad \dot{\varphi}_1 = 2\frac{\dot{x}_\mathrm{L}}{r_1}\ .$$

Geben Sie alle Lösungen für den Aufgabenteil b) in Abhängigkeit des Freiheitsgrads x_L an.

Bestimmen Sie die resultierende Kraft S_1 im Seil zwischen der Rolle II und der Masse m_L. (**1,5 Punkte**)

$$S_1 = m_\mathrm{L}\,[g + \ddot{x}_\mathrm{L}]$$

Bestimmen Sie die resultierende Kraft S_2 im Seil zwischen der Rolle II und der Umlenkrolle. (**1,5 Punkte**)

$$S_2 = \frac{1}{2}\,[m_2 + m_\mathrm{L}]\,g + \frac{1}{2}\left[m_2 + m_\mathrm{L} + \frac{\Theta_2}{r_2^2}\right]\ddot{x}_\mathrm{L}$$

Bestimmen Sie das Drehmoment M, welches der Motor aufbringen muss, um eine vorgegebene Beschleunigung a der Masse m_L in Richtung von x_L zu erreichen. (**1,5 Punkte**)

$$M = \frac{1}{2}\,[m_2 + m_\mathrm{L}]\,r_1\,g + \frac{1}{2}\left[m_2 + m_\mathrm{L} + \frac{\Theta_2}{r_2^2} + 4\frac{\Theta_1}{r_1^2}\right]r_1\,a$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

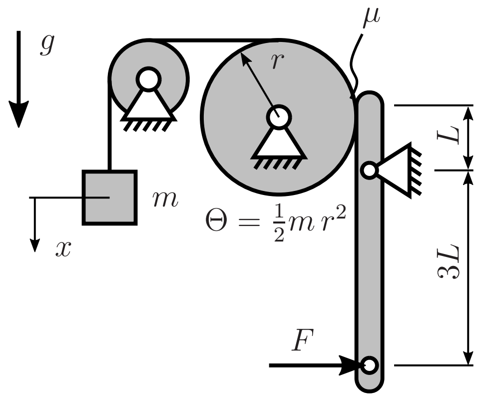
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine einfache Bremsvorrichtung. Die Bewegung des Systems kann gebremst werden, indem eine Kraft F am unteren Ende des Hebels aufgebracht wird. Zwischen der Rolle und dem Hebel gelte der Gleitreibungskoeffizient μ. Solange sich die Masse m weiter nach unten bewegt gilt für das System der Zusammenhang

$$mg - 3\mu F - \frac{3}{2} m\ddot{x} = 0 \ .$$



Bestimmen Sie zunächst die eingezeichnete Bremskraft F so, dass die Bremsbeschleunigung der Masse den Wert $\ddot{x} = -a$ annimmt. (**1,0 Punkte**)

$$F = \frac{m}{6\mu} \left[2g + 3a\right]$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Masse m auf der Höhe h_0 über dem Boden und bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_0 senkrecht nach unten. Ab diesem Zeitpunkt werde das System nun durch die Kraft F gebremst.

Welche Bedingung muss für F gelten, damit die Masse nicht auf dem Boden aufschlägt? (**2,0 Punkte**)

$$F > \frac{m}{6\mu} \left[2g + \frac{3}{2} \frac{v_0^2}{h_0}\right]$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

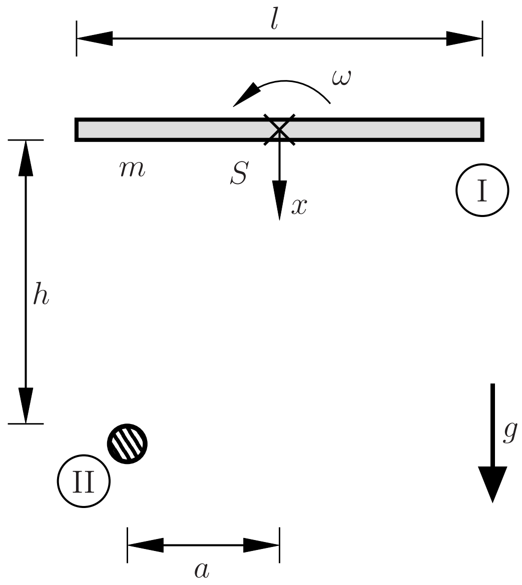
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)

Im Folgenden wird ein Balken I (Länge l, Masse m Schwerpunkt S) aus einer Höhe h aus der Ruhelage losgelassen. Dabei wirkt die Erdbeschleunigung g. Anschließend stößt der Balken gegen einen raumfesten Punkt II. Für den Stoß gilt die Stoßzahl e. Die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit des Balkens lassen sich über die gegebenen Koordinaten x und ω beschreiben. Während des Stoßvorgangs kann der Einfluss der Gravitation vernachlässigt werden.



Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_S des Schwerpunktes des Balkens kurz vor dem Aufprall mit dem raumfesten Punkt bezogen auf das gegebene Koordinatensystem.

(1,0 Punkte)

$v_S = \sqrt{2\,g\,h}$

Sei nun die absolute Geschwindigkeit v_S des Balkens vor dem Stoß bekannt.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Balkens im Stoßpunkt direkt nach dem Stoß $\bar{v}_P$ bezogen auf das gegebene Koordinatensystem.

(1,0 Punkte)

$\bar{v}_P = -e\,v_S$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Im Folgenden kann die Geschwindigkeit des Balkens im Stoßpunkt direkt nach dem Stoß $\bar{v}_{\mathrm{P}}$ als bekannt betrachtet werden.

Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ sowie die resultierende Geschwindigkeit des Balkens im Schwerpunkt $\bar{v}_{\mathrm{S}}$ direkt nach dem Stoß bezogen auf das gegebene Koordinatensystem.

(3,0 Punkte)

$$\bar{\omega} = \frac{a\,[\bar{v}_{\mathrm{P}} - v_{\mathrm{S}}]}{\frac{1}{12}l^2 + a^2}$$

$$\bar{v}_{\mathrm{S}} = \bar{v}_{\mathrm{P}} - \bar{\omega}\,a = \bar{v}_{\mathrm{P}} - \frac{\bar{v}_{\mathrm{P}} - v_{\mathrm{S}}}{\frac{1}{12}\left[\frac{l}{a}\right]^2 + 1}$$

Seien nun die Geschwindigkeiten $\bar{v}_{\mathrm{S}}$ und $\bar{\omega}$ diekt nach dem Stoß gegeben.

Bestimmen Sie den Impuls $\hat{F}$, der im gesamten Stoßvorgang wirkt. **(1,0 Punkte)**

$$\hat{F} = -\frac{m\,l^2}{12\,a}\,\bar{\omega} \quad \text{oder} \quad \hat{F} = m\,[v_{\mathrm{S}} - \bar{v}_{\mathrm{S}}]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

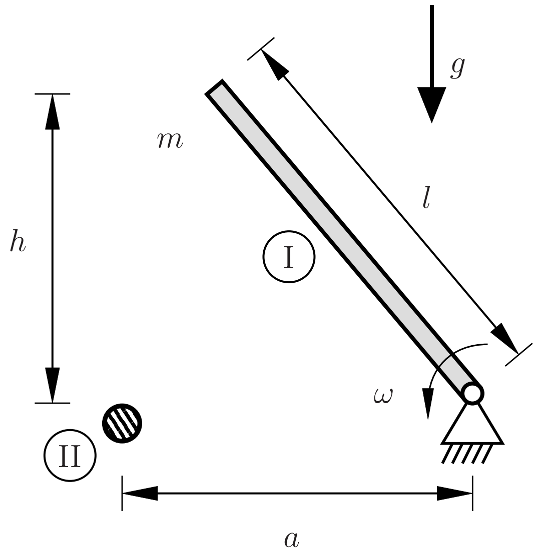
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

b)
Ein Balken I der Länge l und Masse m ist auf der rechten Seite gelagert und befindet sich in der Skizze in Ruhelage, so dass das linke Ende die Höhe h gegenüber dem raumfesten Auftreffpunkt II hat. Der Auftreffpunkt ist $a < l$ von der Lagerung entfernt. Es wirkt die Erdbeschleunigung g. Während des Stoßvorgangs kann der Einfluss der Gravitation vernachlässigt werden.



Die Winkelgeschwindigkeit ω, die durch die Erdbeschleunigung g kurz vor dem Stoß erreicht wird, ist in Abhängigkeit der Höhe bekannt als

$$\omega = \frac{\sqrt{3\,g\,h}}{l}.$$

Bestimmen Sie die Stoßzahl e aus dem Quotienten h^*/h der Ausgangshöhe h und der Rückschlaghöhe h^* nach dem Stoß. Geben Sie dazu auch das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten $\bar{\omega}/\omega$ kurz vor und kurz nach dem Stoß in Abhängigkeit des Höhenquotienten h^*/h an. **(1,5 Punkte)**

$$e = \sqrt{\frac{h^*}{h}}$$

$$\frac{\bar{\omega}}{\omega} = -\sqrt{\frac{h^*}{h}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

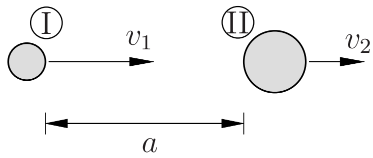
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

Bestimmen Sie die im Stoß dissipierte Energie D, also die Energie die nach dem Stoß nicht wieder in Bewegungsenergie umgewandelt wurde, aus den Höhen h^* und h. (**1,0 Punkte**)

$$D = \frac{1}{2}\, m\, g\, (h - h^*)$$

c)
Im Folgenden sollen zwei Kugeln I und II betrachtet werden, zwischen denen ein **voll-plastischer** Stoß entsteht. Kugel I hat die Masse m_1 und die Ausgangsgeschwindigkeit v_1. Kugel II hat die Masse m_2 und eine Ausgangsgeschwindigkeit $v_2 < v_1$.



Nach welcher Zeit t treffen die Kugeln aufeinander? (**0,5 Punkte**)

$$t = \frac{a}{v_1 - v_2}$$

Wie groß ist das Verhältnis der Ausgangsgeschwindigkeiten $\frac{v_1}{v_2}$ in Abhängigkeit der Massen m_1 und m_2, wenn die resultierende Geschwindigkeit nach dem Stoß $\bar{v} = 2\, v_2$ ist? (**1,0 Punkte**)

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2\, m_1 + m_2}{m_1}$$

Vorname: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

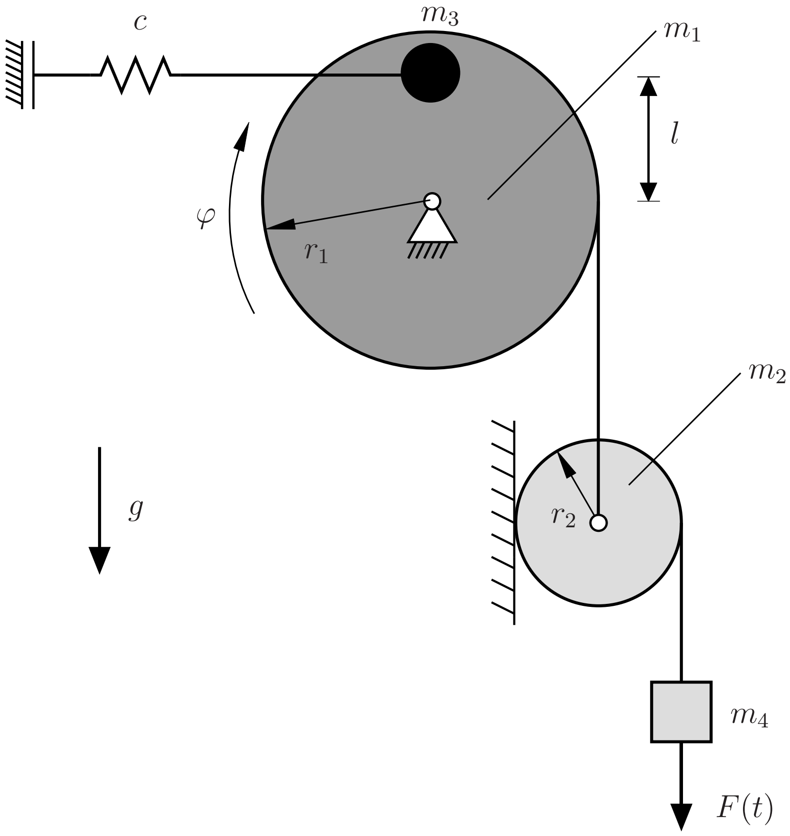
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

Eine Scheibe (Radius r_1 und Masse m_1) ist mittig gelagert und durch ein Seil mit einer kleinen Scheibe (Radius r_2 und Masse m_2) verbunden. Zusätzlich befindet sich eine Punktmasse (Masse m_3) auf der großen Scheibe und ist mit einer Feder (Federsteifigkeit c) verbunden, welche in der dargestellten Lage ungespannt ist. Die kleine Scheibe rollt schlupffrei ab und ist durch ein Seil mit einer Punktmasse (Masse m_4) und einer eingeprägten zeitabhängigen Kraft $F(t)$ verbunden. Die auf den Scheiben aufgerollten Seile sind stets gespannt und das System befindet sich im Schwerefeld der Erde.



a)

Bestimmen Sie, für große Auslenkungen des Systems, die potentielle Energie E_{pot} in Abhängigkeit der Koordinate φ. **(2,0 Punkte)**

$$E_{\text{pot}} = \frac{c}{2}\,(l\,\sin(\varphi))^2 - m_3\,g\,l\,(1-\cos(\varphi)) - g\,\varphi\,r_1\,(m_2 + 2\,m_4)$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

Bestimmen Sie die kinetische Energie E_{kin} des gesamten Systems in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$. **(2,0 Punkte)**

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_3}{2}\,(\dot{\varphi}\,l)^2 + \frac{m_1}{4} r_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{3\,m_2}{4} r_2^2 \left(\frac{r_1}{r_2}\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{m_4}{2}\,(2\,r_1\,\dot{\varphi})^2$$

Bestimmen Sie die generalisierte Kraft des Systems bezogen auf die Koordinate φ. **(1,0 Punkte)**

$$Q = 2\,r_1\,F(t)$$

b)

Für ein anderes, nicht näher spezifiziertes, System ergeben sich die Energien sowie die nichtkonservativen Kräfte zu

$$\begin{aligned}
E_{\text{pot}} &= m\,g\,l\,[1 - \sin(\phi)] + c\,l^2\,\cos(\phi)^2 \ , \\
E_{\text{kin}} &= \frac{m\,l^2}{2}\,\dot{\phi}^2 \ , \\
Q_M &= M_0\,\cos(\Omega\,t) \ , \\
Q_D &= -d\,l^2\,\cos(\phi)^2\,\dot{\phi} \ .
\end{aligned}$$

Geben Sie die Bewegungs-Differentialgleichung bezüglich des Drehwinkels ϕ für große Auslenkungen des Systems an. **(2,0 Punkte)**

$$m\,l^2\,\ddot{\phi} + d\,l^2\,\cos(\phi)^2\,\dot{\phi} - 2\,c\,l^2\,\sin(\phi)\,\cos(\phi) - m\,g\,l\,\cos(\phi) = M_0\,\cos(\Omega\,t)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

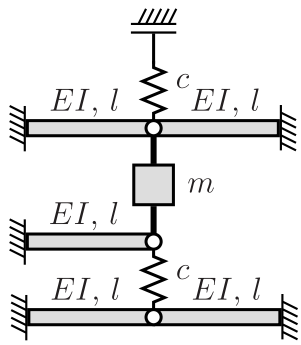
Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

Geben Sie die linearisierte Form der vorher bestimmten Bewegungs-Differentialgleichung um die Ausgangslage ($\phi_0 = 0$, $\dot{\phi}_0 = 0$, $\ddot{\phi}_0 = 0$) an. **(1,0 Punkte)**

$$m\,l^2\,\ddot{\phi} + d\,l^2\,\dot{\phi} - 2\,c\,l^2\phi - m\,g\,l = M_0\,\cos(\Omega\,t)$$

c)

Das dargestellte System besteht aus zwei Federn (Federsteifigkeit jeweils c) und fünf Balken (Biegesteifigkeit jeweils EI, Länge jeweils l). Beiträge aus Dehn- und Schubsteifigkeiten der Balken sollen vernachlässigt werden. Die Masse m ist über zwei starre masselose Stäbe mit den Balkenenden verbunden.



Berechnen Sie die aus den Federn und den Balken resultierende Ersatzfedersteifigkeit c^{ers} bezüglich der vertikalen Verschiebung der Masse. **(2,5 Punkte)**

$$c^{\text{ers}} = \frac{6\,EI}{l^3} + c + \frac{3\,EI}{l^3} + \frac{1}{\dfrac{l^3}{6\,EI} + \dfrac{1}{c}}$$

Bestimmen Sie die zugehörige Eigenkreisfrequenz ω_0 des Systems. **(0,5 Punkte)**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^{\text{ers}}}{m}}$$