TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

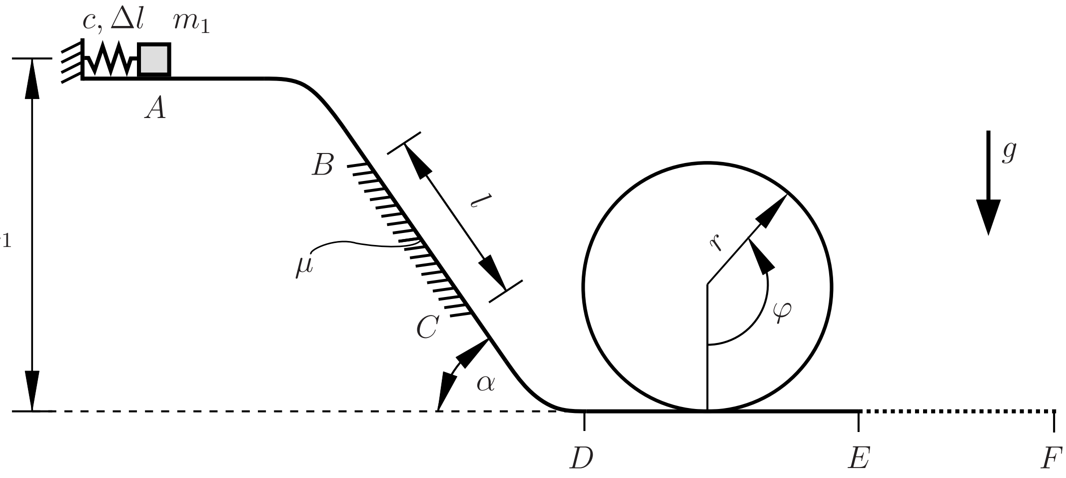
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 1** (Seite 1 von 3)

Eine Punktmasse $m_1$ wird aus der Ruhelage in Punkt $A$ durch eine vorgespannte Feder (Federkonstante $c$, Vorspannung $\Delta l$) in Bewegung versetzt. Die Masse gleitet zunächst reibungsfrei bis zum Punkt $B$ ohne den Kontakt zur Bahn zu verlieren. Zwischen den Punkten $B$ und $C$ ist die Bahn reibungsbehaftet (Gleitreibungskoeffizient $\mu$) und um den Winkel $\alpha$ geneigt. Anschließend durchläuft die Masse zwischen $D$ und $E$ einen Looping mit dem Radius $r$.




a)
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v_D$ der Punktmasse im Punkt $D$. (**2,0 Punkte**)

$$v_D = \sqrt{2\,g\,h_1 + \frac{c}{m_1}\,\Delta l^2 - 2\,\mu\,g\,l\cos\alpha}$$

b)
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(\varphi)$ der Masse innerhalb des Loopings. Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeit $v_D$ bekannt sei. (**1,5 Punkte**)

$$v(\varphi) = \sqrt{v_D^2 - 2\,g\,r\,(1-\cos\varphi)}$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

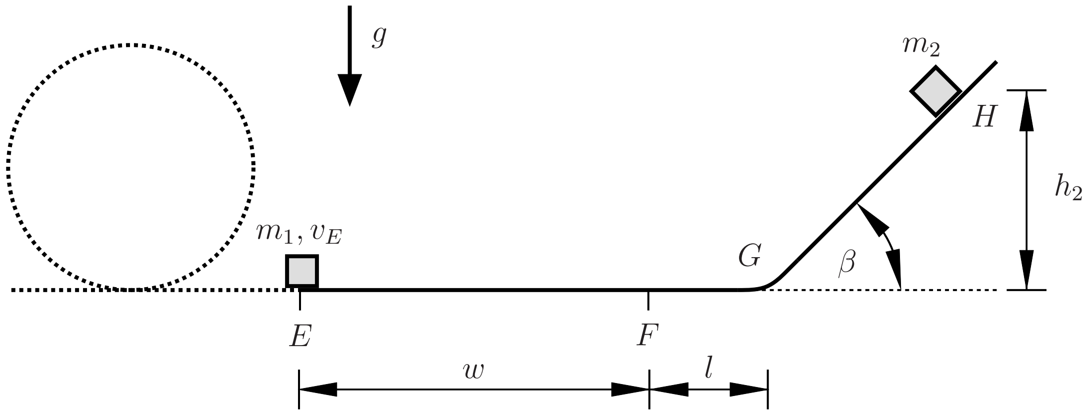
Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 1** (Seite 2 von 3)

Wie groß muss $v_D$ sein, damit die Punktmasse innerhalb des Loopings zu keinem Zeitpunkt den Kontakt zur Bahn verliert? **(1,5 Punkte)**

$$v_D = \sqrt{5\,g\,r}$$

Nun verlässt die Masse $m_1$ den Looping und hat im Punkt $E$ die Geschwindigkeit $v_E$. Genau in dem Moment, wenn die Masse $m_1$ in Punkt E ist, wird in Punkt $H$ die Masse $m_2$ aus der Höhe $h_2$ auf einer um den Winkel $\beta$ geneigten Bahn losgelassen. Die Masse $m_2$ bewegt sich reibungsfrei auf der schiefen Bahn bis zum Punkt $G$ und von dort gleichförmig bis zum Punkt $F$. Der Radius im Punkt $G$ sei vernachlässigbar und als Knick zu behandeln.




c)
Wie lange benötigt die Masse $m_2$ vom Zeitpunkt des Loslassens in $H$ bis zum Erreichen des Punktes $G$? **(1,5 Punkte)**

$$t_{HG} = \sqrt{\frac{2\,h_2}{g\,\sin^2\beta}}$$

Wie groß muss der Abstand $w$ zwischen $E$ und $F$ gewählt werden, damit die beiden Massen $m_1$ und $m_2$ in Punkt $F$ kollidieren? **(1,5 Punkte)**

$$w(v_E, g, \beta, h_2, l) = v_E\left[\sqrt{\frac{2\,h_2}{g\,\sin^2\beta}} + \frac{l}{\sqrt{2\,g\,h_2}}\right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 1** (Seite 3 von 3)

d)
Nehmen Sie nun an, dass die beiden Massen in Punkt F mit der betragsmäßig gleichen Geschwindigkeit ($|v_1| = |v_2|$) aufeinander stoßen. Damit Masse $m_1$ nach dem Stoß wieder oben in Punkt $A$ ankommt, soll ihre absolute Geschwindigkeit nach dem Stoß um den Faktor $f$ größer sein als vor dem Stoß (also $|\bar{v}_1| = f\,|v_1|$). Wie groß muss dazu $m_2$ (in Abhängigkeit von $f$, $m_1$ und der Stoßzahl $e$) sein? (**1,5 Punkte**)

$$m_2 = m_1 \left[\frac{1+f}{1+2\,e-f}\right]$$

Für welche Stoßzahl $e$ darf die Masse $m_2$ am kleinsten sein, sodass $m_1$ trotzdem wieder oben ankommt? (**0,5 Punkte**)

$$e = 1$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

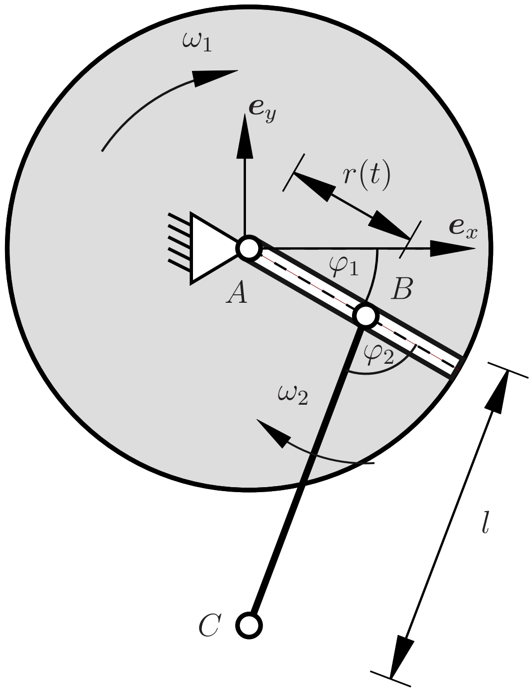
Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 2** (Seite 1 von 3)

a)

Das gegebene System besteht aus einer Kreisscheibe, welche mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = \dot{\varphi}_1(t)$ um das Festlager in Punkt A rotiert. Auf dieser Kreisscheibe wird in Punkt $B$ ein Stab der Länge $l$ gelenkig in einer Nut geführt, wobei für den Abstand $\overline{AB} = r(t) = \sin(4\,\omega_1\,t)$ gilt. Dieser Stab rotiert mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = \dot{\varphi}_2(t)$ um Punkt $B$.

Beschrieben wird das System über das gegebene, globale $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$-Koordinatensystem, dessen Ursprung genau im Festlager im Punkt A liegt. Die konstanten Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1$ und $\omega_2$ sind als bekannt anzunehmen und die Winkel $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ und $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ sollen nicht weiter spezifiziert werden.




Bestimmen Sie die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}_C = v_{C_x}\boldsymbol{e}_x + v_{C_y}\boldsymbol{e}_y$ des Punktes $C$ im gegebenen, globalen $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$-Koordinatensystem. **(5,0 Punkte)**

$$v_{C_x} = \dot{R}(t)\cos(\varphi_1) - \omega_1\,R(t)\sin(\varphi_1) - (\omega_1 + \omega_2)\,l\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$v_{C_y} = -\,\dot{R}(t)\sin(\varphi_1) - \omega_1\,R(t)\cos(\varphi_1) - (\omega_1 + \omega_2)\,l\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Anmerkung: $\cos(\pi - \varphi_1 - \varphi_2) = -\cos(\varphi_1 + \varphi_2)\,;\ \sin(\pi - \varphi_1 - \varphi_2) = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$

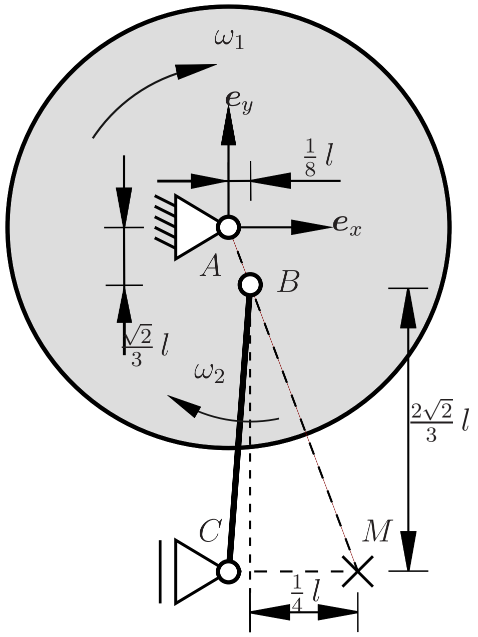
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

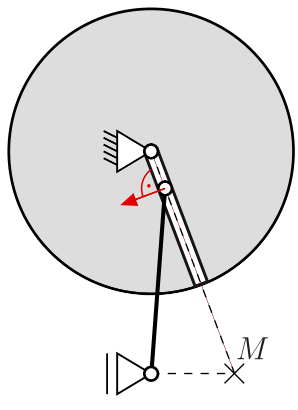
Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 2** (Seite 2 von 3)

b)
Für einen anderes System wurde der Momentanpol $M$ des Stabes wie dargestellt bestimmt. Bei der angegeben Länge $\frac{1}{4}\,l$ handelt es sich um den horizontalen Abstand des Momentanpoles zum Punkt $B$. Die weiteren Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen.
**Hinweis:** Es handelt sich um ein neues System, sodass die Funktion $r(t)$ aus Teilaufgabe a) hier **nicht** gilt.




Zeichnen Sie **in das nachfolgende Kästchen** die Richtung des Geschwindigkeitsvektors des Punktes $B$ ein. Kennzeichnen Sie dabei auftretende rechte Winkel eindeutig und nehmen Sie an, dass sich die Kreisscheibe in Richtung des Uhrzeigersinnes dreht. **(1,0 Punkte)**




Bestimmen Sie nun die Winkelgeschwindigkeit $\omega_1$ der Kreisscheibe in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_2$ des Stabes für die dargestellte Lage. **(2,0 Punkte)**

$\omega_1 = -2\,\omega_2$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

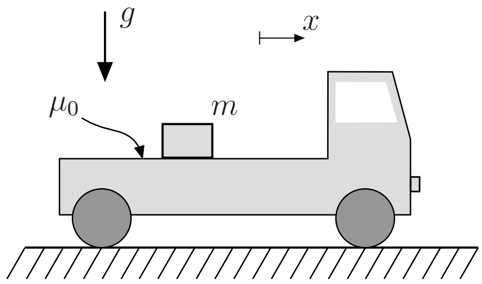
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 2** (Seite 3 von 3)

c)
Die dargestellte Abbildung zeigt einen Lastwagen, auf dessen Ladefläche die Masse $m$ liegt. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ beschleunigt der Lastwagen aus der Ruhelage mit der konstanten Beschleunigung $a_\mathrm{F} = a_0$. Die Interaktion der Oberflächen von Masse und Ladefläche kann durch den Haftreibkoeffizienten $\mu_0$ beschrieben werden.




Bestimmen Sie die maximale Beschleunigung $a_0^{\max}$, mit welcher der Lastwagen zum Zeitpunkt $t = t_0$ beschleunigen darf, sodass die Masse $m$ nicht von der Ladefläche rutscht. **(2,0 Punkte)**

$$a_0^{\max} = \mu\, g$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

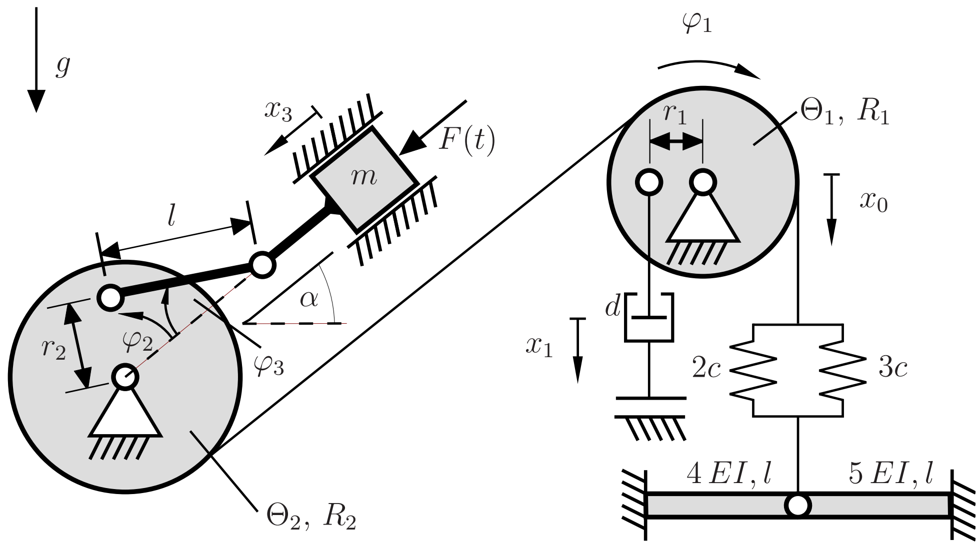
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 3** (Seite 1 von 4)

a)

Das unten dargestellte System besteht aus einem Dämpfer, zwei Rollen (Radien $R_1, R_2$; Massenträgheitsmoment bezogen auf den jeweiligen Mittelpunkt der Rollen $\Theta_1, \Theta_2$) und einer Masse, die durch Stäbe mit der linken Rolle verbunden ist. Die Masse $m$ wird reibungsfrei auf der schiefen Ebene geführt und durch die zeitabhängigen Kraft $F(t)$ angetrieben. Die Seile seien dehnstarr und stets gespannt. Alle Biegebalken und Stäbe sind als masselos zu betrachten.




Bestimmen Sie die kinematischen Bindungen $\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_2)$ und $\dot{x}_1(\dot{\varphi}_2)$. **(1,0 Punkte)**

$\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_2) = \dot{\varphi}_2 \frac{R_2}{R_1}$

$\dot{x}_1(\dot{\varphi}_2) = -\dot{\varphi}_2 \frac{R_2}{R_1} r_1$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 3** (Seite 2 von 4)

Geben Sie die Geschwindigkeit der Masse $m$ bzgl. der angegebenen Koordinaten an. **(1,0 Punkte)**

$$\dot{x}_3(\varphi_2, \dot{\varphi}_2, \varphi_3, \dot{\varphi}_3) = r_2 \sin(\varphi_2)\,\dot{\varphi}_2 + l \sin(\varphi_3)\,\dot{\varphi}_3$$

An der rechten Seite des Systems befindet sich ein aus Biegebalken und Federn bestehender Federmechanismus. Bestimmen Sie die Ersatzfedersteifigkeit $\bar{c}$ für diesen Mechanismus. **(1,5 Punkte)**

$$\bar{c} = \frac{135\,c\,EI}{27\,EI + 5\,c\,l^3}$$

Geben Sie die kinetische Energie $E_{\mathrm{kin}}$, die potentielle Energie $E_{\mathrm{pot}}$ sowie die virtuelle Arbeit $\delta W$ der nichtkonservativen Lasten des Systems bzgl. der Koordinaten $x_0$, $x_1$, $x_3$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ und ihrer Geschwindigkeiten an. **(3,0 Punkte)**

**Hinweis:** Rechnen Sie mit $\bar{c}$ als Ersatzfedersteifigkeit für den Federmechanismus weiter und setzen Sie das Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil nicht ein.

$$E_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2}\,m\,\dot{x}_3^2 + \tfrac{1}{2}\,\Theta_2\,\dot{\varphi}_2^2 + \tfrac{1}{2}\,\Theta_1\,\dot{\varphi}_1^2$$

$$E_{\mathrm{pot}} = -m\,g\,\sin(\alpha)\,x_3 + \tfrac{1}{2}\,\bar{c}\,x_0^2$$

$$\delta W = F(t)\,\delta\,x_3 - d\,\dot{x}_1\,\delta\,x_1$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 3** (Seite 3 von 4)

b)
Für ein anderes System sei die Bewegungsgleichung

$$\frac{3}{2}\,\Theta\,\ddot{\varphi} + 6\,[3\,d_1 + d_2]\,l\,\dot{\varphi} + \frac{6}{4}\,c\,l^2\,\varphi = 0$$

bereits ermittelt worden und zum Zeitpunkt $t = 0$ seien des Weiteren die Anfangsbedingungen

$$\varphi_0 = \varphi(t = 0) = 0, \qquad \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(t = 0) = 2\,\omega_0$$

bekannt. Die Federkonstante $c$ und die Dämpferkonstanten $d_1$, $d_2$ wurden so gewählt, dass schwache Dämpfung vorliegt.

Bestimmen Sie die Eigenfrequenz $\omega$ und den Abklingkoeffizient $\delta$. **(1,0 Punkte)**

$\omega = \sqrt{\frac{c\,l^2}{\Theta}}$

$\delta = 2\,\frac{[3\,d_1+d_2]\,l}{\Theta}$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

**Aufgabe 3** (Seite 4 von 4)

Lösen Sie die Differentialgleichung. Notieren Sie wichtige Zwischenschritte im Kästchen. **(1,5 Punkte)**

**Hinweis:** Stellen Sie sicher, dass alle im Ergebnis verwendeten Größen spezifiziert sind!

$\varphi(t) = \frac{1}{\omega_d}\, e^{-\delta\, t}\, [\varphi_0\, \omega_d\, \cos(\omega_d\, t) + [\dot{\varphi}_0 + \varphi_0\, \delta]\, \sin(\omega_d\, t)]$

$\omega_d = \omega\, \sqrt{1 - D^2}$

$D = \frac{\delta}{\omega}$

$\varphi(t) = \frac{1}{\omega_d}\, e^{-\delta\, t} 2\, \omega_0\, \sin(\omega_d\, t)$

Welche Bedingung muss die Dämpferkonstante $d_1$ erfüllen, damit das System schwacher Dämpfung unterliegt? Achten Sie darauf, dass Ihr Ergebniss physikalisch sinnvoll ist. **(1,0 Punkte)**

$0 < d < \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{\Theta\, c}}{2} - d_2\right]$