TU Dortmund
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

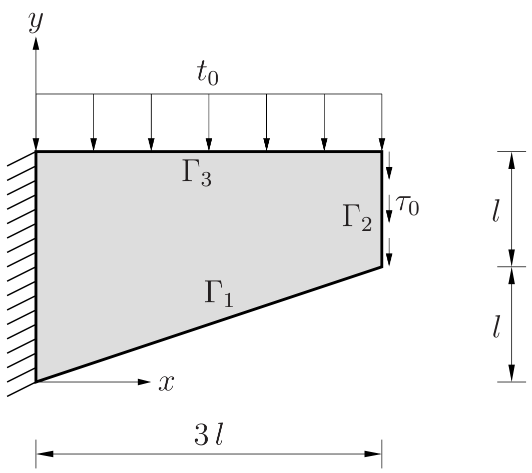
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)

Die nebenstehend skizzierte, links eingespannte Konsole wird wie dargestellt durch Traktionen (eingeprägte Flächenlasten) t_0 (Einheit $\mathrm{N/m^2}$) am Rand Γ_3 sowie τ_0 (Einheit ebenfalls $\mathrm{N/m^2}$) am Rand Γ_2 belastet.

Geben Sie sämtliche Spannungs-Randbedingungen des Trägers an. Nennen Sie dazu auch wesentliche und notwendige Zwischenschritte im nachfolgenden Kästchen. (**3,0 Punkte**)



Γ_1 : Normalenvektor: $[\boldsymbol{n}_1] = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$; Spannungsvektor: $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_1$

Randbedingung für spannungsfreien Rand:

$$\boldsymbol{t}_1 = \mathbf{0} \;\forall\; (x,y) \in \Gamma_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma_{xx} - 3\,\sigma_{xy} = 0 \quad \wedge \quad \sigma_{yx} - 3\,\sigma_{yy} = 0 \;\forall\; (x,y) \in \Gamma_1$$

Γ_2 : $\sigma_{xx}(x, 2l) = 0 \quad \wedge \quad \sigma_{xy}(x, 2l) = -\tau_0$

Γ_3 : $\sigma_{yx}(3l, y) = -t_0 \quad \wedge \quad \sigma_{yx}(3l, y) = 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

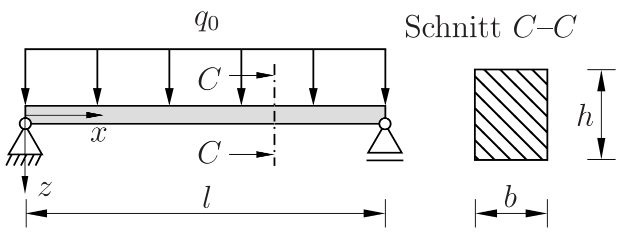
Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Die Funktion der Schubspannug für das rechts dargestellte und durch eine Streckenlast q_0 (Einheit N/m) belastete System wurde zu

$$\tau_{zx} = \mathcal{A}\left[\frac{2\,x}{l} - 1\right]\left[4\,z^2 - h^2\right]$$

bestimmt, wobei $\mathcal{A}$ einen allgemeinen Koeffizienten darstellt.



Geben Sie die Funktion der Normalspannung $\sigma_{xx}(x,z)$ an, sodass sich das System im statischen Gleichgewicht befindet. **(2,0 Punkte)**

$$\text{Gleichgewichtsbedingung:} \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx} = -\int \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,\mathrm{d}x$$

$$\sigma_{xx}(x,z) = -8\,\mathcal{A}\,z\left[\frac{x^2}{l} - x\right] + \mathcal{B} \quad \text{mit} \quad \sigma_{xx}(x=0,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} = 0$$

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem aus der Balkentheorie nach Bernoulli zu berechnenden, nämlich

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}\,z\,,$$

und bestimmen Sie daraus den Wert für den Koeffizienten $\mathcal{A}$. Das Flächenträgheitsmoment ist durch $I_y = [b\,h^3]/12$ vorgegeben. **(2,0 Punkte)**

$$M(x) = \frac{1}{2}q_0\,l\,x - \frac{1}{2}\,q_0\,x^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx}^{\mathrm{Bern}}(x,z) = -\frac{6\,q_0}{b\,h^3}\,z\left[\frac{x^2}{l} - x\right], \text{ und somit}$$

$$\mathcal{A} = \frac{3}{4}\frac{q_0}{b\,h^3}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

Berechnen Sie die Funktion der Spannung σ_{zz} unter Berücksichtigung des oben bestimmten Wertes für $\mathcal{A}$. Etwaig auftretende Konstanten sollen hier zunächst **nicht** berechnet werden. **(1,5 Punkte)**

Gleichgewichtsbedingung : $\quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{zz} = -\int \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}\,\mathrm{d}z$

$$\sigma_{zz}(x,z) = -\frac{2\,\mathcal{A}}{l}\left[\frac{4}{3}z^3 - h^2\,z\right] + \mathcal{C}$$

Geben Sie im nachfolgenden Kästchen die Randbedingung für σ_{zz} an der Stelle $z = -h/2$ an und berechnen Sie die oben noch unbestimmte(n) Konstante(n). **(1,5 Punkte)**

Hinweis: Der Betrag der Traktion/Flächenlast am oberen Rand des Trägers ergibt sich aus $t_0 = q_0/b$.

Randbedingung für oberen Rand: $\quad \sigma_{zz}(x, h/2) = -t_0 = -\frac{q_0}{b}, \quad$ damit folgt

$$\mathcal{C} = -\frac{q_0}{b} + \frac{2\,\mathcal{A}}{l}\left[-\frac{1}{3}\,h^3\right] = -\frac{q_0}{b}\left[1 + \frac{1}{2\,l}\right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

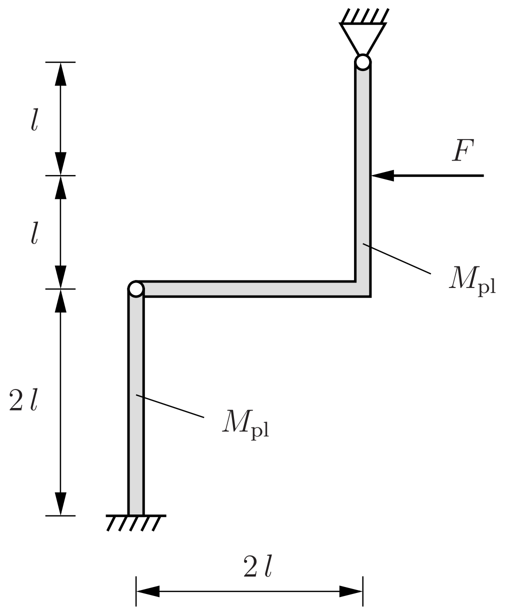
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

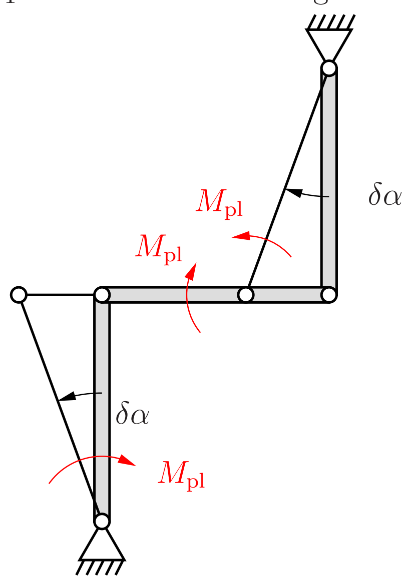
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

a)
Das nebenstehende System soll mittels der Fließgelenktheorie bemessen werden. Spannungen infolge von Quer- und Normalkräften können dabei vernachlässigt werden. Abmessungen, Belastungen und die jeweiligen plastischen Grenzmomente M_{pl} sind der nebenstehenden Skizze zu entnehmen.



In der nachfolgenden Skizze ist bereits eine Fließgelenk-Konfiguration für kleine Auslenkungen und deren Winkeln eingezeichnet. Tragen Sie die plastischen Momente ein und berechnen Sie die Tragkraft F_{T} für kleine Auslenkungen. **(1,0 Punkte)**



$$F_{\mathrm{T}} = 2\,\frac{M_{\mathrm{pl}}}{l}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

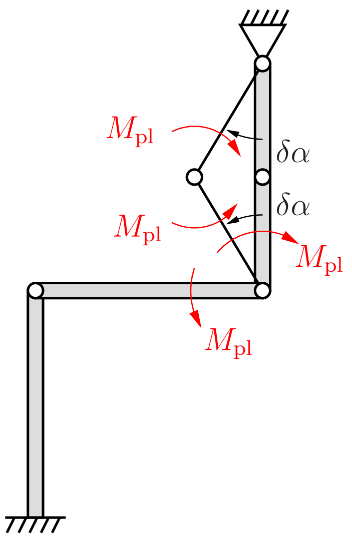
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

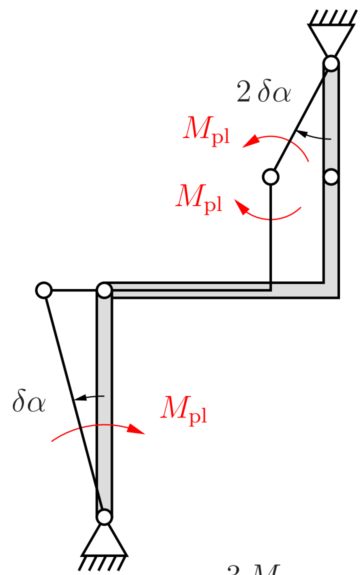
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

Fügen Sie im nachfolgenden Kästchen die fehlenden Fließgelenk-Konfigurationen inklusive des jeweiligen Freiheitsgrades (unabhängigen Winkels), der plastischen Momente und der Lager ein. Des Weiteren sind die entsprechenden Tragkräfte F_T für kleine Auslenkungen anzugeben. **(6,0 Punkte)**



$$F_\mathrm{T} = 3\,\frac{M_\mathrm{pl}}{l}$$



$$F_\mathrm{T} = \frac{3}{2}\frac{M_\mathrm{pl}}{l}$$

Geben Sie die kritische Traglast $F_\mathrm{T}^\mathrm{krit}$ des Systems an. **(0,5 Punkte)**

$$F_\mathrm{T}^\mathrm{krit} = \frac{3}{2}\frac{M_\mathrm{pl}}{l}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

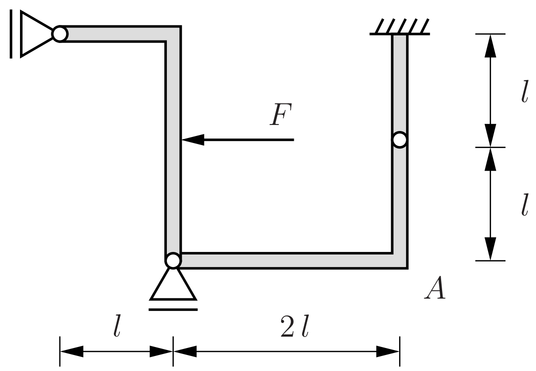
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

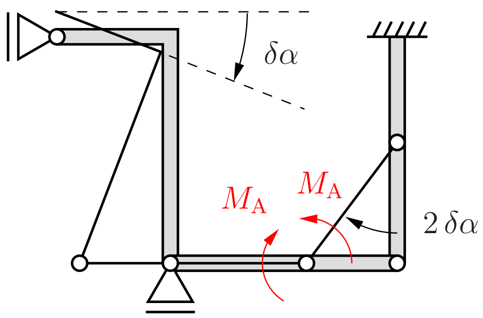
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

b)
Das nebenstehende starre Balkensystem mit den eingezeichneten Abmessungen und der Kraft F ist gegeben. Mittels des Prinzips der virtuellen Verrückungen soll das Schnittmoment M_A im Punkt A bestimmt werden. Nehmen Sie kleine Auslenkungen an.



Zeichnen Sie eine ausgelenkte Lage inklusive des Moments M_A und des dazu korrespondierenden Freiheitsgrads ein. Geben Sie sämtliche Winkel in Abhängigkeit dieses Freiheitsgrades an. **(1,0 Punkte)**



Bestimmen Sie das Moment M_A als Funktion von F im Eckpunkt A. **(1,5 Punkte)**

$$M_\mathrm{A}(F) = \frac{F\,l}{2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

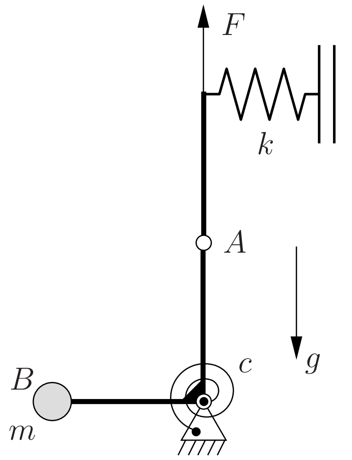
Nachname: ____________________

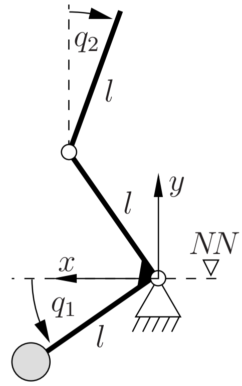
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

a)

Das dargestellte System besteht aus einem starren Winkel mit der Kantenlänge l, der im Punkt A gelenkig mit einem starren Stab, ebenfalls der Länge l, verbunden ist. Die Masse der Stäbe ist gegenüber der Punktmasse (Masse m) im Punkt B zu vernachlässigen. Das System befindet sich im Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung g) und ist weiter durch eine Kraft F belastet. Der Stab wird mittels einer Feder (Federsteifigkeit k), der Winkel mittels einer Drehfeder (Drehsteifigkeit c) abgestützt, welche für den abgebildeten Zustand $q_1 = q_2 = 0$ ungespannt sind.





Stellen Sie für beliebig große Auslenkungen das Gesamtpotential Π des Systems in Abhängigkeit der Freiheitsgrade q_1 und q_2 auf. Beachten Sie das vorgegebene Nullniveau NN und fassen Sie die einzelnen Terme **nicht** zusammen. **(3,0 Punkte)**

$$\Pi = \frac{1}{2}\, c\, q_1^2 - m\, g\, l\, \sin(q_1) + F\, \left[2l - \cos(q_1)\, l - \cos(q_2)\, l\right] + \frac{1}{2}\, k\, \left[\sin(q_1)\, l - \sin(q_2)\, l\right]^2$$

Ebenfalls richtig:

$$\Pi = \frac{1}{2}\, c\, q_1^2 - m\, g\, l\, \sin(q_1) + F\, \left[-\cos(q_1)\, l - \cos(q_2)\, l\right] + \frac{1}{2}\, k\, \left[\sin(q_1)\, l - \sin(q_2)\, l\right]^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

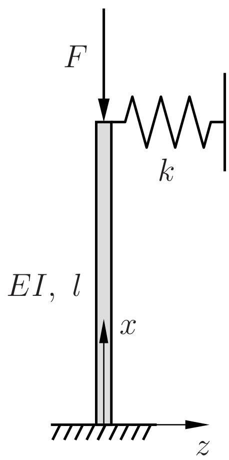
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

Im folgenden wird Bezug auf ein anderes System genommen, welches in der unterstehenden Abbildung gegeben ist. Es handelt sich um einen einseitig fest eingespannten Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI), welcher am freien Ende durch eine Kraft F belastet und durch eine Feder (Federsteifigkeit k) abgestützt wird. Verformungsanteile aus Normal- und Schubbelastung sind zu vernachlässigen.



b)

Geben Sie die kinematischen und dynamischen Randbedingungen der Biegelinie $w(x)$ für das dargestellte System an, die zur eindeutigen Lösung der Differentialgleichung vierter Ordnung notwendig sind. **(2,0 Punkte)**

$$w(0) = 0\ ;$$

$$w'(0) = 0\ ;$$

$$M(l) = 0\,,\ \text{oder}\ -EIw''(l) = 0\,,\ \text{oder}\ w''(l) = 0\ ;$$

$$Q(l) = -k\,w(l)\,,\ \text{oder}\ -EIw'''(l) = -k\,w(l)\ .$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

Beschreiben Sie kurz in Worten, wie Sie sicherstellen können, dass der Ansatz $w(x) \approx w_\mathrm{h}(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2$ sowohl kinematisch, als auch dynamisch verträglich ist.

(1,0 Punkte)

- Ansatz in Randbedingungen einsetzen.
- Nach Koeffizienten auflösen.

c)

Für das gleiche System ergibt sich mit einem alternativen Ansatz ein kinematisch verträgliches Polynom für die Biegelinie zu $w_\mathrm{h}(x) = a\,x^2$. Bestimmen Sie das Potential des Systems in Abhängigkeit des Freiwertes a. Werten Sie dazu alle auftretenden Integrale aus.

(2,0 Punkte)

$$\Pi = \frac{1}{2}\,EI\,4\,a^2\,l - \frac{1}{2}\,F\,\frac{4}{3}\,a^2\,l^3 + \frac{1}{2}\,k\,a^2\,l^4$$

Geben Sie für den zuvor erwähnten Ansatz $w_\mathrm{h}(x) = a\,x^2$ an, ab welcher Kraft das stabile Gleichgewicht verlassen wird und ein Ausknicken des Balkens zu erwarten ist.

(2,0 Punkte)

$$F_\mathrm{Krit} = EI\,\frac{3}{l^2} + \frac{3}{4}\,k\,l$$