TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)

Für einen ebenen Spannungszustand ist die folgende Airysche Spannungsfunktion in Polarkoordinaten r und φ gegeben.

$$F = C_1\, r^2 + C_2\, r^2\, \cos(2\,\varphi)$$

Berechnen Sie die Spannungen $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi r}$ und $\sigma_{\varphi\varphi}$ ohne die Konstanten C_1 und C_2 zu spezifizieren. **(2,0 Punkte)**

$$\sigma_{rr}(r,\varphi) = 2\,C_1 - 2\,C_2 \cos(2\,\varphi)$$

$$\sigma_{r\varphi}(r,\varphi) = 2\,C_2\, \sin(2\,\varphi)$$

$$\sigma_{\varphi r}(r,\varphi) = \sigma_{r\varphi}(r,\varphi)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 2\,C_1 + 2\,C_2\, \cos(2\,\varphi)$$

Die Randbedingungen $\sigma_{\varphi\varphi}(r,\varphi{=}\alpha){=}0$ und $\sigma_{r\varphi}(r,\varphi = \alpha) = \tau_0$ sind gegeben. Bestimmen Sie die Konstanten C_1 und C_2. **(1,0 Punkte)**

$C_1 = -\frac{\tau_0}{2}\, \cot(2\,\alpha)$ $\qquad$ $C_2 = \frac{\tau_0}{2\, \sin(2\,\alpha)}$

Prüfen Sie, ob die gegebene Airysche Spannungsfunktion eine sinnvolle Wahl darstellt. **(1,0 Punkte)**

Der Spannungszustand aus einer Airyschen Spannungsfunktion erfüllt automatisch Gleichgewicht und die Randbedingungen sind auch bereits erfüllt.
Prüfung der Potentialgleichung

$$\Delta(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) = \Delta(4\,C_1) \overset{!}{=} 0 \quad \checkmark$$

zeigt, dass auch Kompatibilität erfüllt ist. Also ist dem Spannungszustand eindeutig ein Verschiebungsfeld zugeordnet und die Airysche Spannungsfunktion kann als sinnvoll gelten.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Erklären Sie kurz in Worten, welche Schritte zur Berechnung des Verschiebungsfeldes durchgeführt werden müssten, das zum Spannungszustand in Aufgabe a) gehört. Nennen sie dabei auch Zwischenschritte.
Hinweis: Das Verschiebungsfeld muss nicht berechnet werden. (**1,0 Punkte**)

$\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$ Hooke'sches Gesetz

$\boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \boldsymbol{u}$ integrieren, Argumente nutzen, dass Integrationskonstanten nur von jeweils anderen Korrdinaten abhängen können. Verschiebungsrandbedingungen zur Berechnung der Konstanten verwenden.

c)

Für einen Balken der Dicke $2\,a$, der durch gegebene Kräfte P und N belastet wird, wurde der ebene Spannungszustand

$$\sigma_{xx}(x,y) = -C_1\,\frac{P\,x\,y}{a^3} + \frac{N}{2\,a}\,, \qquad \tau_{xy}(x,y) = -\frac{3\,P}{4\,a}\left[1 - \frac{y^2}{a^2}\right]\,, \qquad \sigma_{yy}(x,y) = C_2\,y$$

berechnet. Es greifen keine Volumenkräfte an.

Bestimmen Sie die Konstanten C_1 und C_2 so, dass sich das System im statischen Gleichgewicht befindet.

(**1,0 Punkte**)

$C_1 = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $C_2 = 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

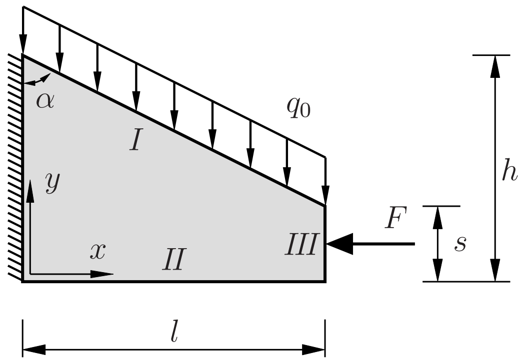
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

d)
Die nebenstehend skizzierte Scheibe der Dicke t ist auf der linken Seite eingespannt und wird wie dargestellt durch Traktionen q_0 auf dem Rand I belastet. Die Kraft F auf Rand III ist nur als Gesamtkraft im integralen Sinne bekannt. Es liegt ein ebener Spannungszustand vor.



Geben Sie sämtliche Spannungs-Randbedingungen des Systems für die Ränder I, II und III an. Nennen Sie dazu auch wesentliche und notwendige Zwischenschritte im nachfolgenden Kästchen.

Hinweis: Der Winkel α ist durch die Abmessungen eindeutig bestimmt und kann als bekannt vorausgesetzt werden. **(4,0 Punkte)**

I: Definitionsbereich: $0 \le x \le l$, $y = h - \frac{[h-s]}{l}\, x$

Normalenvektor auf Rand:

$$\boldsymbol{n}^I = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

Traktionsvektor nach Cauchy-Postulat:

$$\boldsymbol{t}^I = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}\, \cos(\alpha) + \sigma_{xy}\, \sin(\alpha) \\ \sigma_{xy}\, \cos(\alpha) + \sigma_{yy}\, \sin(\alpha) \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ -q_0 \end{bmatrix}$$

II: Definitionsbereich: $0 \le x \le l$, $y = 0$

$$\sigma_{yy} = 0\,, \qquad \sigma_{xy} = 0$$

III: Definitionsbereich: $x = l$, $0 \le y \le s$

$$t \int\limits_0^s \sigma_{xx}\, \mathrm{d}y \stackrel{!}{=} -F\,, \qquad t \int\limits_0^s \sigma_{xy}\, \mathrm{d}y \stackrel{!}{=} 0$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau

Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

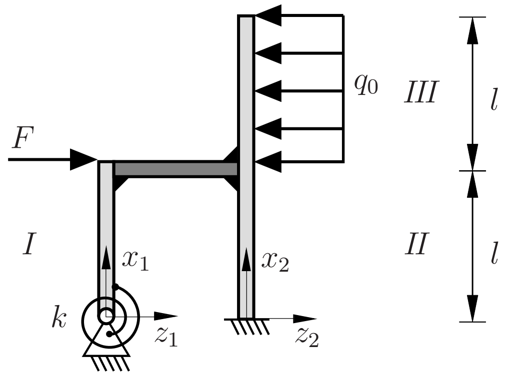
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

Im dargestellten System befindet sich am unteren Ende des linken Balkens (Länge l, Biegesteifigkeit EI_1) eine Drehfeder (Drehfederkonstante k) und am oberen Ende greift eine Kraft F an. Am rechten Balken (Länge $2l$, Biegesteifigkeit EI_2) wirkt in dem Bereich *III* ($l \leq x_2 \leq 2l$) eine konstante Streckenlast q_0. Der horizontale Balken ist als starr zu betrachten. Verformungsanteile aus Normal- und Schubbelastung sind zu vernachlässigen.



a)
Geben Sie sämtliche kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen der Bereiche *I* und *II* an. Die Übergangsbedingungen zu Bereich *III* sind nicht anzugeben.
(2,0 Punkte)

$$w_I(x_1 = 0) = 0 \qquad w_I(x_1 = l) = w_{II}(x_2 = l)$$

$$w_{II}(x_2 = 0) = 0 \qquad w'_I(x_1 = l) = w'_{II}(x_2 = l) = 0$$

$$w'_{II}(x_2 = 0) = 0$$

b)
Bestimmen Sie das Potential der inneren Kräfte $\mathit{\Pi}_\mathrm{i}$ sowie das Potential der äußeren Lasten $\mathit{\Pi}_\mathrm{a}$ für das oben dargestellte System.
Hinweis: Integrale sollen nicht gelöst werden und die Biegelinien-Funktionen $w_I(x_1)$, $w_{II}(x_2)$ und $w_{III}(x_2)$ sollen nicht weiter spezifiziert werden. **(2,5 Punkte)**

$$\mathit{\Pi}_\mathrm{i} = \frac{1}{2}\int_0^l EI_1 w_I''(x_1)^2 \mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^l EI_2 w_{II}''(x_2)^2 \mathrm{d}x_2$$
$$+\frac{1}{2}\int_l^{2l} EI_2 w_{III}''(x_2)^2 \mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2}k w'(x_1 = 0)^2$$

$$\mathit{\Pi}_\mathrm{a} = q_0 \int_l^{2l} w_{III}(x_2)\mathrm{d}x_2 - F w_I(x_1 = l)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

c)
Für ein anderes System sind die Bedingungen $w(x = l) = 0$ und $w'(x = l) = w'_0$ gegeben. Die Größe w'_0 ist als bekannt anzusehen. Reduzieren Sie die Anzahl der unbekannten Koeffizienten des Ritz-Ansatzes

$$w(x) = a_0\,[x - l] + a_1\,x^3 + a_2 \sin\left(\frac{\pi}{2\,l}\,x\right)$$

so weit wie möglich. **(1,5 Punkte)**

$$w = a_0\,[x - l] + \frac{w'_0 - a_0}{3\,l^2}\,x^3 + \frac{l}{3}\,[a_0 - w'_0] \sin\left(\frac{\pi}{2\,l}\,x\right)$$

oder

$$w = [w'_0 - 3\,a_1\,l^2]\,[x - l] + a_1\,x^3 - a_1\,l^3 \sin\left(\frac{\pi}{2\,l}\,x\right)$$

oder

$$w = [w'_0 + 3\,\frac{a_2}{l}]\,[x - l] - \frac{a_2}{l^3}\,x^3 + a_2 \sin\left(\frac{\pi}{2\,l}\,x\right)$$

d)
Für ein weiteres System wurde das Potential

$$\Pi = \frac{1}{2}\,EI \int_l^{2l} [w''(x)]^2\,\mathrm{d}x - 4 \int_0^l \frac{m\,g}{l}\,w(x)\,\mathrm{d}x - 2F\,w'(l)\,l$$

bestimmt. Die Randbedingung $w(x = 0) = 0$ ist gegeben. Der gewählte Ritz-Ansatz lautet

$$w(x) = a_0^2 + a_1\,x^2.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 und a_1 gemäß des Ritz-Verfahrens.
Hinweis: Tragen Sie wichtige Zwischenschritte ebenfalls in das Kästchen auf der nächsten Seite ein.

(3,0 Punkte)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

$$w(x=0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

Mit

$$\tilde{w}(x) = a_1\, x^2 \rightarrow \tilde{w}'(x) = 2\, a_1\, x \rightarrow \tilde{w}''(x) = 2\, a_1$$

folgt

$$\Pi = \frac{1}{2}\, EI \int_l^{2l} [4\, a_1]^2\, \mathrm{d}x - 4 \int_0^l \frac{m\, g}{l}\, [a_1\, x^2]\, \mathrm{d}x - 2F\, [2\, a_1\, l]\, l$$

$$\Pi = 2\, EI\, a_1^2 l - \frac{4}{3} m\, g\, a_1\, l^2 - 4F\, a_1\, l^2$$

und

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 = 4\, EI\, a_1\, l - \frac{4}{3} m\, g\, l^2 - 4F\, l^2 \rightarrow a_1 = \frac{l}{EI} \left[\frac{1}{3} m\, g + F \right]$$

Der Term $\frac{m\,g}{l}$ ist als konstante Streckenlast anzusehen. Begründen Sie, ob die Genauigkeit des gewählten Ritz-Ansatz ausreichend ist. **(1,0 Punkte)**

Nein, da der Polynomgrad zu gering ist.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

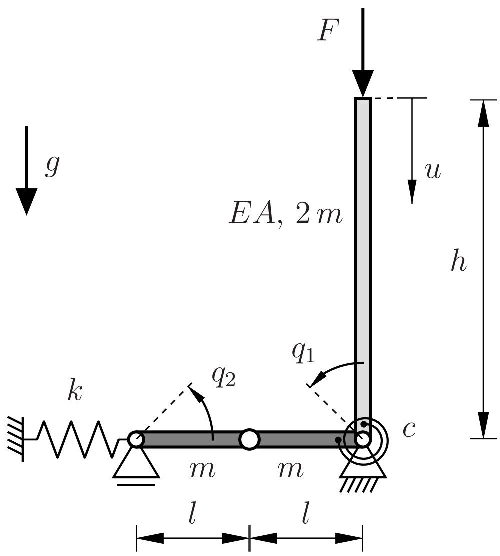
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 2)

Das nebenstehend dargestellte System befindet sich im Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung g). Es besteht aus zwei dehn- und biegestarren Stäben der Masse m (Länge l) sowie einem biegestarren Stab der Masse $2\,m$ (Dehnsteifigkeit EA, Länge h). Die Stäbe sind links mit einer Feder der Steifigkeit k gekoppelt, sowie am rechten Lager mit einer Drehfeder der Steifigkeit c verbunden. Beide Federn seien in der vorliegenden Lage ungespannt. Das System wird zusätzlich durch die richtungstreue Kraft F belastet. Es soll gelten, dass die Verschiebung des Lastangriffspunktes u immer in Stabrichtung zeige und wesentlich kleiner als die Länge h ist, d.h. $u \ll h$.



a)
Geben Sie das äußere Potential $\Pi_\mathrm{a}^\mathrm{I}$ und das innere Potential $\Pi_\mathrm{i}^\mathrm{I}$ des Systems in Abhängigkeit der Winkelkoordinaten q_1 und q_2 sowie der Verschiebung u an. Fassen Sie die Terme nicht weiter zusammen. **(3,5 Punkte)**

$$\begin{aligned}\Pi_\mathrm{a}^\mathrm{I} &= -F\,h\,[1-\cos(q_1)] - F\,u\,\cos(q_1) + m\,g\,l\,\sin(q_2) - m\,g\,[h-u]\,[1-\cos(q_1)]\\ &\downarrow\ u \ll h\\ &= -F\,h\,[1-\cos(q_1)] + m\,g\,l\,\sin(q_2) - m\,g\,h\,[1-\cos(q_1)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_\mathrm{i}^\mathrm{I} &= \underbrace{\frac{1}{2}\,k\,[2\,l\,[1-\cos(q_2)]]^2}_{\text{Feder links}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,c\,[q_1+q_2]^2}_{\text{Drehfeder}}\\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}\,E\,A\,\frac{u^2}{h}}_{\text{akzeptierte Lösung für } 2\,m\,g \ll F\text{, siehe Kommentar 12-L.pdf!}}\end{aligned}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 2)

b)
Für ein nicht näher spezifiziertes, ähnliches System sei das Potential durch

$$\Pi^{\mathrm{II}} = [F\,l + m\,g\,l]\sin(q) + \frac{1}{2}\,k\,[l\,\cos(q)]^2$$

gegeben. Bestimmen Sie die kritische Kraft F_{krit}, ab welcher die durch $q = \pi/2$ gegebene Gleichgewichtslage instabil wird. Geben Sie an, welche Bedingung Sie hierfür ausgewertet haben. **(1,5 Punkte)**

$F_{\mathrm{krit}} = k\,l - m\,g$, $\quad \partial^2_q \Pi \overset{!}{=} 0$ wurde ausgewertet. (Übergang von (lokalem) Minimum des Potentials in Maximum bei weiterer Erhöhung von F.)

c)
Für ein weiteres System wurden das innere Potential $\Pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{III}}$ und äußere Potential $\Pi_{\mathrm{a}}^{\mathrm{III}}$ zu

$$\Pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{III}} = \frac{1}{2}\,c\,[q_1 - q_2]^2 + m\,g\,l\,[1 - \cos(q_2)]$$
$$\Pi_{\mathrm{a}}^{\mathrm{III}} = -\frac{1}{2}\,F\,l\,[2\,\cos(q_2) - \cos(q_1) - 1] - M\,q_1$$

bestimmt, wobei hier eine Kraft F sowie ein Moment M wirken. Bestimmen Sie F und M so, dass $(q_1,\, q_2) = (0,\, \pi/2)$ eine Gleichgewichtslage darstellt. **(3,0 Punkte)**

$F = -\dfrac{2\,m\,g\,l + c\,\pi}{2\,l}$ $\qquad$ $M = -\frac{1}{2}\,c\,\pi$

Untersuchen Sie die obige Gleichgewichtslage auf Stabilität. Geben Sie eine eindeutige Begründung inklusive der von Ihnen ausgewerteten Kriterien an. **(2,0 Punkte)**

Stabile Lage, da die Hessematrix $H := \partial^2_{\boldsymbol{q}} \Pi^{\mathrm{III}}\big|_{(q_1,\,q_2)=(0,\,\pi/2)} = \begin{bmatrix} c - F\,l/2 & -c \\ -c & c \end{bmatrix}$ bei den gegebenen Koordinaten und den im vorherigen Kästchen bestimmten Lasten positiv definit ist (Hauptminor 1. Ordnung $c - F\,l/2 = m\,g\,l/2 + c\,[1 + \pi/4] > 0$ und $\det H > 0$). D.h. das System befindet sich in einem lokalen Minimum des oben gegebenen Potentials.