TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)

Für ein nicht näher spezifiziertes System wurde die Airy'sche Spannungsfunktion zu

$$F(x_1, x_2) = e^{c\,x_2}\,\cos\left(c\,x_1\right)$$

bestimmt, wobei c eine Konstante darstellt. Es wird ein ebener Spannungszustand bzgl. der x_1, x_2-Ebene angenommen. Ferner stellen x_1 und x_2 die Raumkoordinaten im zugrundeliegenden kartesischen Koordinatensystem dar.

Geben Sie sämtliche Spannungen, die nicht identisch gleich Null sind, als Funktionen des Ortes $(x_1,\,x_2)$ an. **(3,0 Punkte)**

$$\sigma_{11} = c^2\,e^{c\,x_2}\,\cos\left(c\,x_1\right)$$

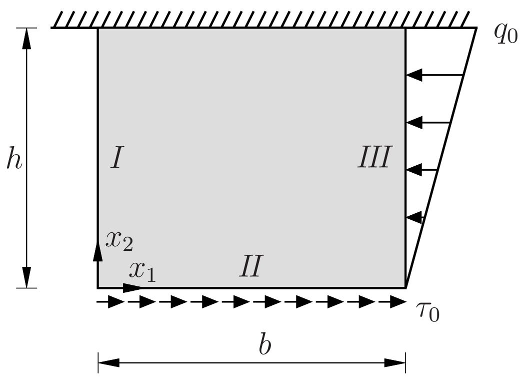
$$\sigma_{22} = -c^2\,e^{c\,x_2}\,\cos\left(c\,x_1\right)$$

$$\sigma_{12} = c^2\,e^{c\,x_2}\,\sin\left(c\,x_1\right)$$

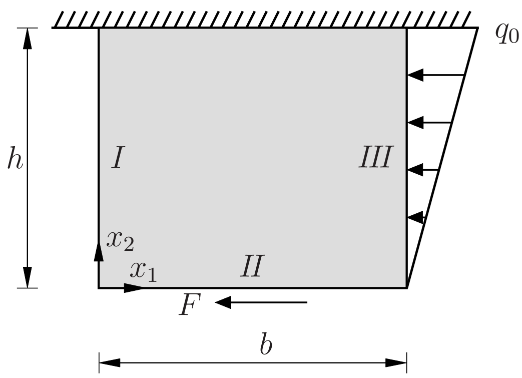
b)

Untenstehend sind zwei eingespannte Scheiben der Dicke t dargestellt, System 1 und System 2. System 1 wird am Rand *II* durch die konstante Traktion (eingeprägte Flächenlast) τ_0 (Einheit $\mathrm{N/m^2}$) belastet. Das System 2 wird am Rand *II* durch die Kraft F (Einheit N) belastet. Der Rand *III* ist zudem bei beiden Systemen durch eine linear veränderliche Traktion mit Maximalwert q_0 (Einheit ebenfalls $\mathrm{N/m^2}$) belastet.

System 1:



System 2:



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

Geben Sie sämtliche Spannungs-Randbedingungen des Systems 1 für die Ränder *II* und *III* an. Verwenden Sie **keine** integralen Randbedingungen. **(2,0 Punkte)**

Rand *II*: $0 \leq x_1 \leq b$, $x_2 = 0$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2 = 0) = -\tau_0$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2 = 0) = \quad 0$$

Rand *III*: $x_1 = b$, $0 \leq x_2 \leq h$

$$\sigma_{11}(x_1 = b, x_2) = -\frac{q_0}{h}\, x_2$$

$$\sigma_{12}(x_1 = b, x_2) = \quad 0$$

Geben Sie sämtliche Spannungs-Randbedingungen des Systems 2 für den Rand *II* an. Verwenden Sie **ausschließlich** integrale Randbedingungen. **(1,0 Punkte)**

Rand *II*:

$$\int_{x_1=0}^{b} -\sigma_{22}\, t \, \mathrm{d}x_1 = \quad 0$$

$$\int_{x_1=0}^{b} -\sigma_{12}\, t \, \mathrm{d}x_1 = -F$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)

Bestimmen Sie den ebenen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}(x_1, x_2)$ für das bezüglich der kartesischen Basisvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ gegebene Verschiebungsfeld

$$\boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} x_1^2 \, \boldsymbol{e}_1 + 6 \, x_1 \, x_2 \, \boldsymbol{e}_2 + 0 \, \boldsymbol{e}_3$$

und geben Sie dessen Koeffizienten in Matrix-Schreibweise an. **(1,5 Punkte)**

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{ij} = \begin{bmatrix} x_1 & 3\,x_2 & 0 \\ 3\,x_2 & 6\,x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Erfüllt der zuvor berechnete Verzerrungstensor die Kompatibilitätsbedingungen? Begründen Sie ihre Antwort (**keine** Rechnung). **(1,0 Punkte)**

Die Kompatibilitätsbedingungen sind erfüllt da das Dehnungsfeld aus dem Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}$ abgeleitet wurde.

Für einen anderen ebenen Verzerrungszustand seien die Koeffizienten des Verzerrungstensors als Funktionen des Ortes zu

$$\varepsilon_{11} = \alpha\, x_2^2\,, \quad \varepsilon_{22} = -\beta\, x_1^2\,, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = x_1\, x_2$$

gegeben. Welche Bedingung muss für die Konstanten α und β gelten, damit die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sind? **(1,5 Punkte)**

$$\alpha = 1 + \beta$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

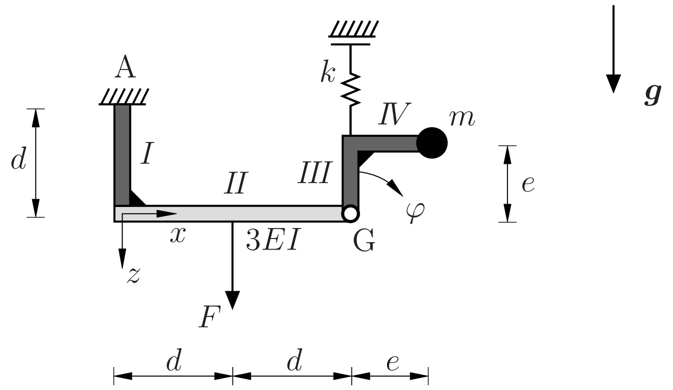
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

Das unten dargestellte Balkensystem besteht aus zwei L-förmigen Teilen, die im Punkt G durch ein Gelenk miteinander verbunden sind. Am rechten Ende ist eine Punktmasse m angebracht. Das Balkensystem selbst soll als masselos und dehnstarr betrachtet werden. Desweiteren gelte, dass die Bereiche I, III und IV biegestarr seien und dass der Bereich II die Biegesteifigkeit $3\,EI$ aufweise. Die Abmessungen sowie Lagerungen und Belastungen sind der Zeichnung zu entnehmen.



Die Durchbiegung des Balkens im Bereich II bzgl. des lokalen $\{x, z\}$-Koordinatensystems sei für den gesamten Bereich $0 \leq x \leq 2\,d$ durch die Funktion $w(x)$ als bekannt vorausgesetzt. Die Feder mit der Steifigkeit k sei in der dargestellten Lage $\varphi = 0$ ungespannt. Der Winkel φ beschreibt eine Verdrehung relativ zur vertikalen Raumrichtung.

a)
Geben Sie das Gesamtpotential $\Pi = \Pi_\mathrm{i} + \Pi_\mathrm{a}$ des Systems an, ohne dabei von kleinen Auslenkungen bzgl. φ auszugehen.
Hinweis: Integrale sollen nicht gelöst werden und die Funktion $w(x)$ sowie deren Ableitungen sollen nicht weiter spezifiziert werden. Anteile aus Schub- und Normalverformung sind zu vernachlässigen. **(3,0 Punkte)**

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^{2d} 3\,E\,I\,[w''(x)]^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\,k\left[w(x=2d) + [1-\cos(\varphi)]\,e\right]^2$$

$$-\,m\,g\left[w(x=2d) + [1-\cos(\varphi)]\,e + \sin(\varphi)\,e\right] - F\,w(x=d)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

b)
Geben Sie alle **kinematischen** Rand- bzw. Übergangsbedingungen des Balkens im Bereich II an, die ohne zusätzlich eingeführte Größen bzw. Funktionen angegeben werden können. **(1,0 Punkte)**

$$w(x=0)=0$$

$$w'(x=0)=0$$

Für die Approximation des Gesamtpotentials soll das Ritz-Verfahren angewandt werden. Für die Biegelinie $w(x)$ sei dazu der Ansatz $w(x)=a_0+a_1\,\sin\left(2\,\pi\,x/d\right)+a_2\,\cos\left(2\,\pi\,x/d\right)$ mit den Freiwerten a_i gegeben. Vereinfachen Sie die Ansatzfunktion anhand der zuvor bestimmten kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen. **(1,5 Punkte)**

$$w(x)=a_0-a_0\,\cos\left(\tfrac{2\pi}{d}\,x\right) \qquad \text{oder} \qquad w(x)=-a_2+a_2\,\cos\left(\tfrac{2\pi}{d}\,x\right)$$

Geben Sie die Gleichung(en) an, mit Hilfe derer sich der/die verbliebene(n) Freiwert(e) bestimmen lassen, **ohne** sie für das vorliegende Potential zu spezifizieren! **(0,5 Punkte)**

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_0}\stackrel{!}{=}0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2}\stackrel{!}{=}0$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

c)
Für ein anderes System wurde in Abhängigkeit von den Freiheitsgraden α und β das Potential

$$\widetilde{\Pi}(\alpha,\beta) = 4\,M\,\alpha - \frac{1}{4}\,F\,l\,\sin(\alpha)\,\sin(\beta) + 5\,k\,l^2\,\cos^2(\beta)$$

aufgestellt. Spezifizieren Sie das notwendige Kriterium für Gleichgewichtslagen des Systems für das gegebene Potential $\widetilde{\Pi}(\alpha,\beta)$ und bestimmen Sie anschließend das Moment M derart, dass das notwendige Kriterium bei $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ erfüllt wird. (**Hinweis:** Hier soll keine Approximation durch eine Taylor-Reihe o. Ä. erfolgen.) **(2,5 Punkte)**

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,M - \frac{1}{4}\,F\,l\,\cos(\alpha)\,\sin(\beta) \\ -\frac{1}{4}\,F\,l\,\sin(\alpha)\,\cos(\beta) - 10\,k\,l^2\,\cos(\beta)\,\sin(\beta) \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{1}{16}\,F\,l$$

d)
Für ein weiteres System unter der Last $F > 0$ wurden das Potential $\widehat{\Pi}$ sowie die dazugehörigen Ableitungen in Abhängigkeit von den Freiheitsgraden γ und δ bestimmt zu

$$\widehat{\Pi}(\gamma,\delta) = 2\,m\,g\,l\,\cos(\gamma) + \frac{1}{2}\,c_{\mathrm{T}}\,\gamma^2 + \frac{1}{10}\,F\,l\,\sin(\delta)\ ,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial \widehat{\Pi}}{\partial \delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\,m\,g\,l\,\sin(\gamma) + c_{\mathrm{T}}\,\gamma \\ \frac{1}{10}\,F\,l\,\cos(\delta) \end{bmatrix}\ ,$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \widehat{\Pi}}{\partial \gamma\,\partial \gamma} & \frac{\partial^2 \widehat{\Pi}}{\partial \gamma\,\partial \delta} \\ \frac{\partial^2 \widehat{\Pi}}{\partial \delta\,\partial \gamma} & \frac{\partial^2 \widehat{\Pi}}{\partial \delta\,\partial \delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\,m\,g\,l\,\cos(\gamma) + c_{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10}\,F\,l\,\sin(\delta) \end{bmatrix}\ .$$

Berechnen Sie die Länge $l_{\mathrm{krit}} > 0$, bei welcher sich das System in der Gleichgewichtslage $\gamma = 0$, $\delta = \frac{3\pi}{2}$ in einem kritischen Punkt befindet. **(1,5 Punkte)**

$$l_{\mathrm{krit}} = \frac{c_{\mathrm{T}}}{2\,m\,g}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

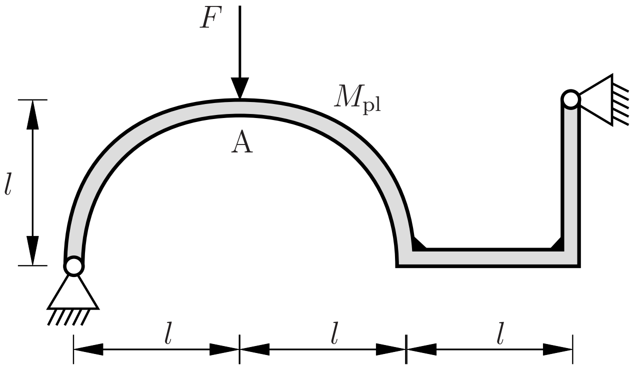
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

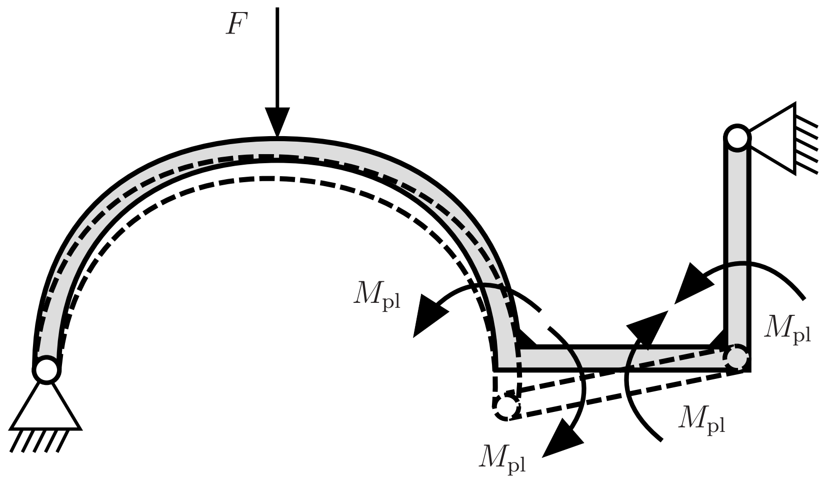
Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

a) Der nebenstehend abgebildete Balken soll unter Vernachlässigung von Normal- und Scherkräften mittels der Fließgelenktheorie ausgelegt werden. Er ist an seinen Enden frei drehbar gelagert und weist ein vollplastisches Moment der Größe M_{pl} auf. Eine Kraft F greift in Punkt A an.



Im Folgenden ist für eine mögliche Fließgelenkkette bereits die ausgelenkte Lage skizziert worden. Ergänzen Sie diese um die wirkenden vollplastischen Momente.

(1,0 Punkte)



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

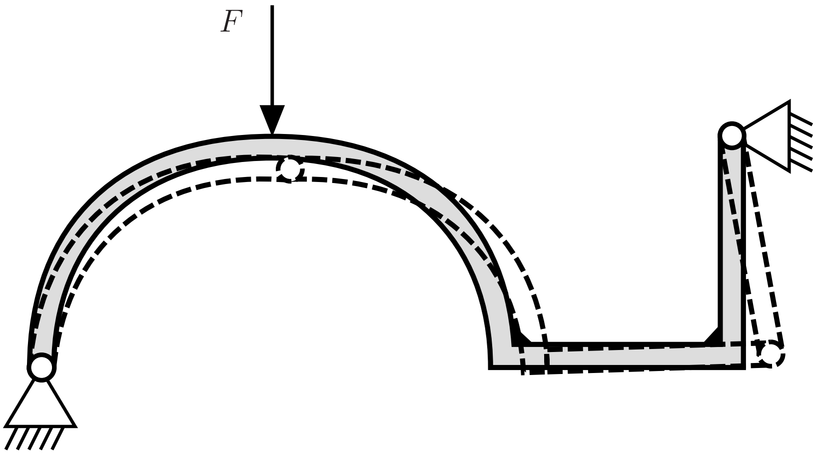
Vorname: ____________________

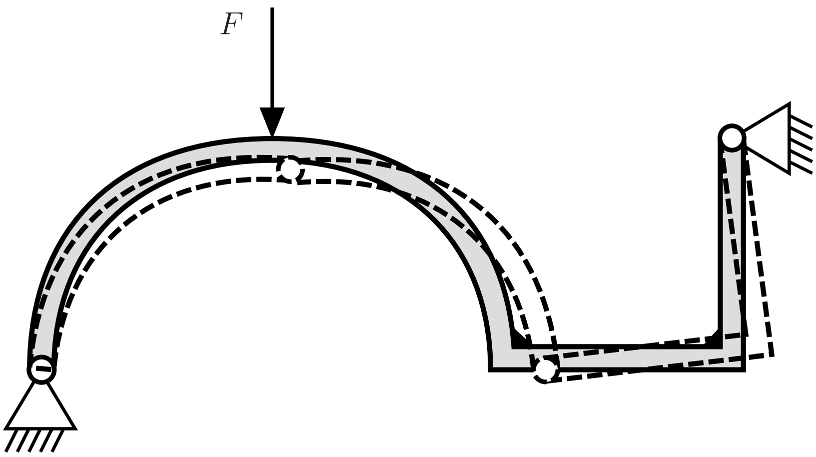
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

Skizzieren Sie nun zwei weitere, potentielle Fließgelenkketten für das System in der ausgelenkten Lage. Nutzen Sie dazu die aus Vorlesung und Übung bekannten potentiellen Stellen. **(1,0 Punkte)**





TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

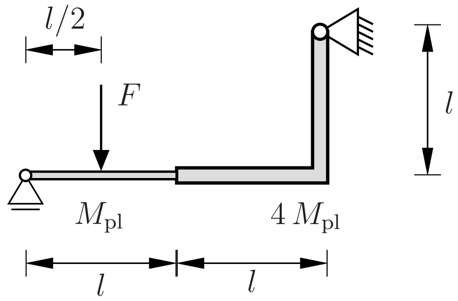
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

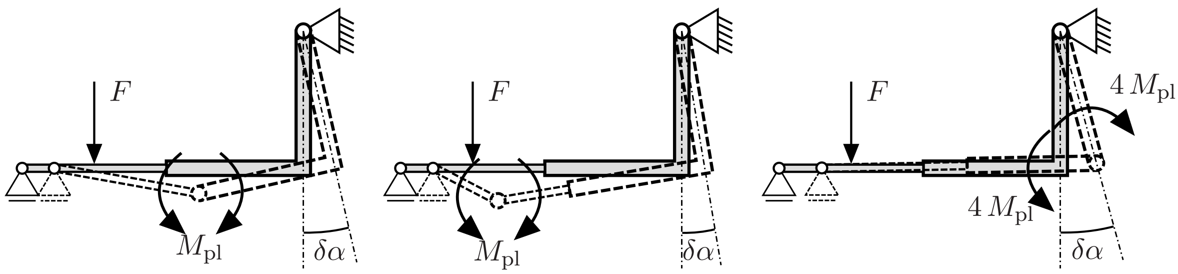
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

b) Der wie nebenstehend abgebildet gelenkig gelagerte Balken ist abgestuft und kann in den zwei Bereichen die angegebenen, vollplastischen Momente aufnehmen. Er ist außerdem durch eine Kraft F in der Mitte des ersten Bereichs belastet.



Im Folgenden sind bereits die möglichen Fließgelenkketten identifiziert und in ausgelenkter Lage skizziert. Ergänzen Sie die Zeichnungen um die wirkenden, plastischen Momente. **(1,5 Punkte)**



Bestimmen Sie nun für jede der oben abgebildeten Fließgelenkketten die virtuelle Arbeit δW in Abhängigkeit der virtuellen Verdrehung $\delta\alpha$. **(3,0 Punkte)**

$$\delta W_1\,(\delta\alpha) = \tfrac{1}{2}\,F\,l\,\delta\alpha - 2\,M_{\mathrm{pl}}\,\delta\alpha$$

$$\delta W_2\,(\delta\alpha) = \tfrac{3}{2}\,F\,l\,\delta\alpha - 4\,M_{\mathrm{pl}}\,\delta\alpha$$

$$\delta W_3\,(\delta\alpha) = -4\,M_{\mathrm{pl}}\,\delta\alpha$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

Geben Sie für jede Fließgelenkkette die möglichen Traglasten F_T an. Bestimmen Sie abschließend die kritische Kraft F_krit, ab der das System unter den Annahmen der Fließgelenktheorie beweglich wird. **(2,0 Punkte)**

$F_{\mathrm{T},1} = 4\,\frac{M_\mathrm{pl}}{l}$

$F_{\mathrm{T},2} = \frac{8}{3}\,\frac{M_\mathrm{pl}}{l}$

$F_{\mathrm{T},3} = \infty$

$F_\mathrm{krit} = F_{\mathrm{T},2}$

c)
Ein Zug/-Druckstab wird in Achsenrichtung zunächst um 1% rein elastisch bis zur Initialfließgrenze σ_y gedehnt. Nun wird er plastisch bis zu einer Dehnung von 3% gezogen. Anschließend wird der Stab komplett entspannt. Geben Sie die verbleibende Dehnung ε_I des Stabes nach dem Entspannen an. Gehen Sie von einem ideal plastischem Materialmodell mit einem Elastizitätsmodul $E > 0$ aus. **(1,0 Punkte)**

$\varepsilon_I = 0.02$

Der Stab wird im Folgenden auf seine Ausgangslänge zurück gestaucht. Geben Sie die in ihm verbleibende Spannung σ_{II} an. **(0,5 Punkte)**

$\sigma_\mathrm{II} = -\sigma_\mathrm{y}$