TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

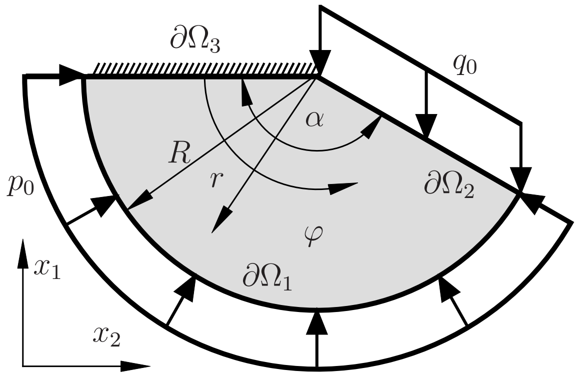
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

a)

Das nebenstehende System besteht aus einer teilkreisförmigen Scheibe mit Radius R und Winkel $\alpha = 150°$. Der Rand $\partial\Omega_3$ ist fest eingespannt. Auf den Rand $\partial\Omega_1$ wirkt eine konstante radiale Drucklast p_0 und auf Rand $\partial\Omega_2$ eine konstante Flächenlast q_0 in negative x_1-Richtung.



Bestimmen Sie sämtliche Spannungs- und Verschiebungsrandbedingungen in Polarkoordinaten (r, φ). **(3,0 Punkte)**

$\partial\Omega_1(r = R, \varphi)$:	$\sigma_{rr} = -p_0$	$\sigma_{r\varphi} = 0$
$\partial\Omega_2(r, \varphi = 150°)$:	$\sigma_{\varphi\varphi} = -\cos(30°)q_0$	$\sigma_{r\varphi} = \sin(30°)q_0$
$\partial\Omega_3(r, \varphi = 0°)$:	$u_r = 0$	$u_\varphi = 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

Für eine andere Belastung stellt sich für das System folgender Spannungszustand im gegebenen polaren Koordinatensystem ein

$$\boldsymbol{\sigma}\,(r,\varphi) = \begin{bmatrix} A\,\frac{3\,r}{R}\,\sin(\varphi) & 0 \\ 0 & B\,r^2\cos(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Die Konstanten A und B sind als bekannt anzunehmen. Geben Sie die Spannungsvektoren für die Ränder $\partial\Omega_1$ und $\partial\Omega_2$ in Polarkoordinaten an. **(2,0 Punkte)**

$$t^{*1} = \begin{bmatrix} 3\,A\,\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$t^{*2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\,B\,r^2 \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

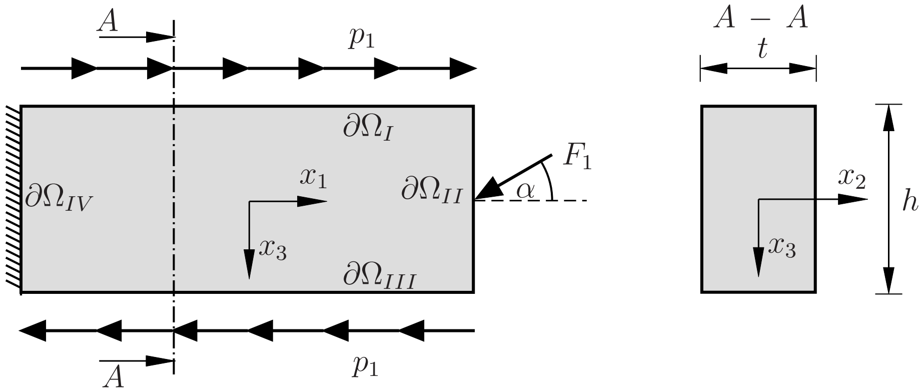
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

b)



Der oben abgebildete Körper unbekannter Länge ist am Rand $\partial\Omega_{IV}$ fest eingespannt. Auf den Rändern $\partial\Omega_I$ und $\partial\Omega_{III}$ wirkt die Last p_1, auf den Rand $\partial\Omega_{II}$ wirkt an der Stelle $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ die Kraft F_1 unter dem Winkel $\alpha = 30°$. Der Körper besitzt einen konstanten Querschnitt mit Höhe h und Breite t. Berechnen Sie für die Airysche Spannungsfunktion

$$F = C_1 \sin(x_1) + C_2\, x_3^2 \cos(x_1)$$

die Spannungen $\sigma_{11}, \sigma_{13}, \sigma_{31}$ und σ_{33} ohne die Konstanten C_1 und C_2 zu spezifizieren.

(2,0 Punkte)

$\sigma_{11} = \quad 2\, C_2 \cos(x_1)$

$\sigma_{13} = -2\, C_2\, x_3 \sin(x_1)$

$\sigma_{31} = -2\, C_2\, x_3 \sin(x_1)$

$\sigma_{33} = -C_1 \sin(x_1) - C_2\, x_3^2 \cos(x_1)$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

Für einen anderen, nicht näher spezifizierten, Ansatz einer Airyschen Spannungsfunktion ergibt sich der Spannungsvektor für den Rand $\partial\Omega_{II}$ zu

$$\boldsymbol{t}^* = \begin{bmatrix} D_1\, 3\sqrt{3}\, x_3^2 \\ 0 \\ 2\, D_1\, x_3^2 + 2\, D_2 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Konstanten D_1 und D_2. Verwenden Sie integrale Randbedingungen.

(2,0 Punkte)

$$D_1 = -2\,\frac{F_1}{h^3\,t}$$

$$D_2 = \frac{5}{12}\,\frac{F_1}{h\,t}$$

c)

Bestimmen Sie für den unten stehenden, in dimensionslosen Koordinaten angegebenen, Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ die Koeffizienten a und b, so dass ein kompatibler Dehnungszustand angegeben wird.

(1,0 Punkte)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\, a\, x_3^4\, x_1 & 0 & 4\, x_1^2\, x_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4\, x_1^2\, x_3 & 0 & \left(\frac{1}{3}\, b + x_3^2\right)\, x_1^3 \end{bmatrix}.$$

$$a = -3$$

$$b = 8$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

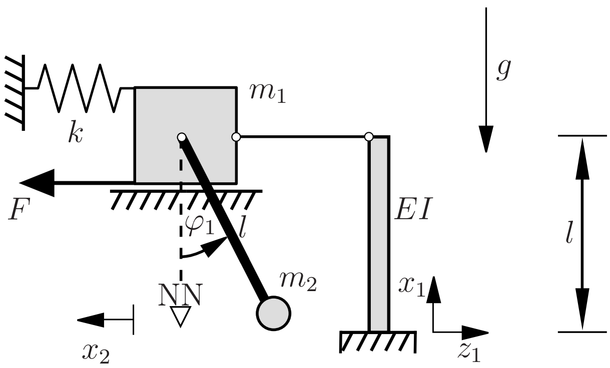
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

Das im Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung g) befindliche dargestellte System besteht aus einem masselosen Biegebalken (Biegesteifigkeit EI, Länge l) sowie einem starren Masseblock (Masse m_1) und einem starren Pendel (Länge l) mit einer Punktmasse am Ende (Masse m_2). Masseblock und Biegebalken sind durch einen starren Stab verbunden. An der Masse m_1 ist des Weiteren eine Feder (Federsteifigkeit k) befestigt, welche für den Zustand $x_2 = 0$ ungespannt ist. Zusätzich greift eine Kraft F wie dargestellt am System an. Die Masse m_1 gleitet widerstandslos in ihrer Lagerung. Für den Wert $\varphi_1 = 0$ befindet sich die Masse m_2 auf Höhe des Nullniveaus NN.



a)
Geben Sie das Gesamtpotential Π des Systems für große Auslenkungen an.
Hinweis: Integrale sollen nicht ausgewertet und weder die Funktion der Biegelinie noch eine ihrer Ableitungen spezifiziert werden. (**2,0 Punkte**)

$$\Pi = \frac{1}{2}\, k\, x_2^2 + m_1\, g\, l + m_2\, g\, l\, [1 - \cos(\varphi)] + \frac{1}{2} \int_0^l EI\ (w'')^2\ \mathrm{d}x_1 - F\, x_2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Geben Sie die kinematischen und dynamischen Randbedingungen der Biegelinie $w(x_1)$ des Biegebalkens für das dargestellte System an, die zur eindeutigen Lösung der Differentialgleichung vierter Ordnung notwendig sind.

(1,0 Punkte)

$w\,(0) = 0\,, \quad w'\,(0) = 0\,, \quad w''\,(l) = 0\,, \quad w\,(l) = -x_2$

Ist der Ansatz

$$w(x_1) = a\,x_1^3 + b\,x_1^2 + c\,x_1 + d$$

kinematisch zulässig? Begründen Sie ihre Antwort. **(0,5 Punkte)**

Ja, da er die RB erfüllt

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

Bestimmen Sie die für das vorliegende System benötigten Gleichung zur Bestimmung sämtlicher Freiwerte des zuvor definierten Ansatzes für die Funktion der Biegelinie $w(x_1)$. **Hinweis:** Werten Sie alle Ableitungen aus, lösen Sie jedoch **nicht** nach den Freiwerten auf. Tragen Sie alle relevanten Rechenschritte in das nachfolgende Kästchen ein.

(4,0 Punkte)

$$w\,(0) = w'\,(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = d = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b} = 0$$

$$\begin{aligned}
w\,(l) =& a\,l^3 + b\,l^2 \\
w'\,(x_1) =& 3\,a\,x_1^2 + 2\,b\,x_1 \\
w''\,(x_1) =& 6\,a\,x_1 + 2\,b \quad \Rightarrow [w''\,(x_1)]^2 = 36\,a^2\,x_1^2 + 24\,a\,b\,x_1 + 4\,b^2 \\
\Rightarrow \quad \Pi =& \frac{1}{2}\,k\,\left[a\,l^3 + b\,l^2\right]^2 + m_1\,g\,l + m_2\,g\,l\,[1 - \cos(\varphi)] \\
& + \frac{1}{2}\int_0^l EI\,\left[36\,a^2\,x_1^2 + 24\,a\,b\,x_1 + 4\,b^2\right]^2\,\mathrm{d}x_1 + F\,\left[a\,l^3 + b\,l^2\right] \\
\Leftrightarrow \quad \Pi =& \frac{1}{2}\,k\,\left[a^2\,l^6 + 2a\,b\,l^5 + b^2\,l^4\right] + m_1\,g\,l + m_2\,g\,l\,[1 - \cos(\varphi)] \\
& + EI\,\left[6\,a^2\,l^3 + 6\,a\,b\,l^2 + 4\,b^2 l\right] + F\,\left[a\,l^3 + b\,l^2\right] \\
\Rightarrow \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a} =& \frac{1}{2}\,k\,\left[2\,a\,l^6 + 2\,b\,l^5\right] + EI\,\left[12\,a\,l^3 + 6\,b\,l^2\right] + F\,l^3 = 0 \\
\Rightarrow \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b} =& \frac{1}{2}\,k\,\left[2\,a\,l^5 + 2\,b\,l^4\right] + EI\,\left[6\,a\,l^2 + 8\,b\,l\right] + F\,l^2 = 0
\end{aligned}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

b)
Für ein anderes System wurde in Abhängigkeit der Freiheitsgrade φ und δ das Potential

$$\Pi = 8\,M\,\varphi - \frac{1}{2}F\,l\,\sin(\varphi)\,\sin(\delta) + 10\,c\,l^2\,\cos(\delta)^2$$

aufgestellt. Bestimmen Sie das notwendige Kriterium für eine Gleichgewichtslage des Systems. Geben Sie anschließend den Wert für das Moment M an, für den sich das System bei $\varphi = 0$ und $\delta = \frac{\pi}{2}$ in einem Gleichgewichtszustand befindet. **(2,5 Punkte)**

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 8\,M - \frac{1}{2}\,F\,l\,\cos(\varphi)\,\sin(\delta) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = -\frac{1}{2}\,F\,l\,\sin(\varphi)\,\cos(\delta) - 20\,k\,l^2\,\cos(\delta)\,\sin(\delta) = 0$$

$$M = \frac{1}{16}\,F\,l$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

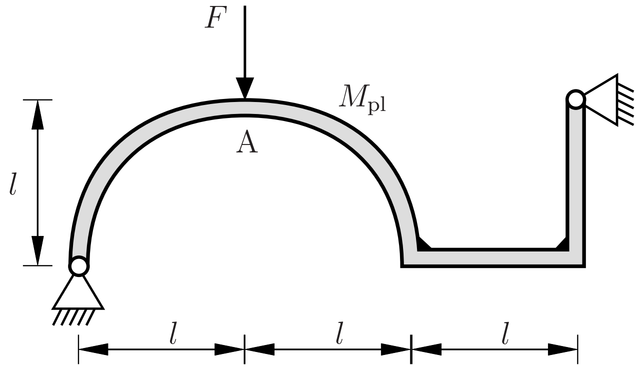
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

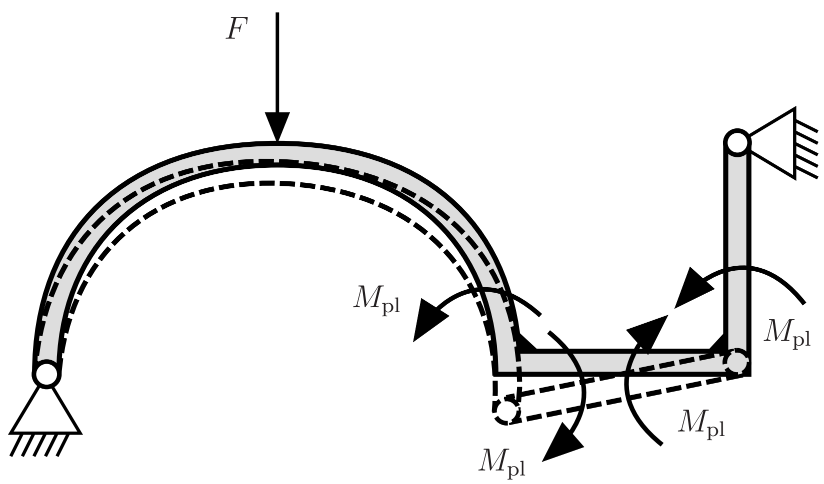
Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

a) Der nebenstehend abgebildete Balken soll unter Vernachlässigung von Normal- und Scherkräften mittels der Fließgelenktheorie ausgelegt werden. Er ist an seinen Enden frei drehbar gelagert und weist ein vollplastisches Moment der Größe M_{pl} auf. Eine Kraft F greift in Punkt A an.



Im Folgenden ist für eine mögliche Fließgelenkkette bereits die ausgelenkte Lage skizziert worden. Ergänzen Sie diese um die wirkenden vollplastischen Momente.

(1,0 Punkte)



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

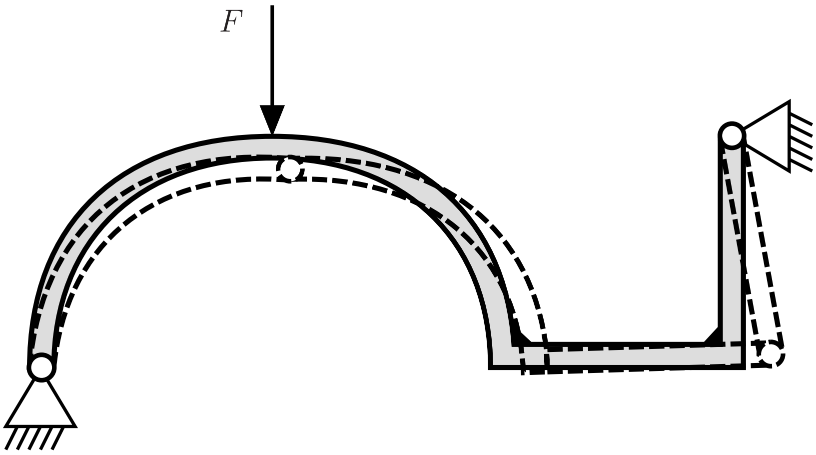
Vorname: ____________________

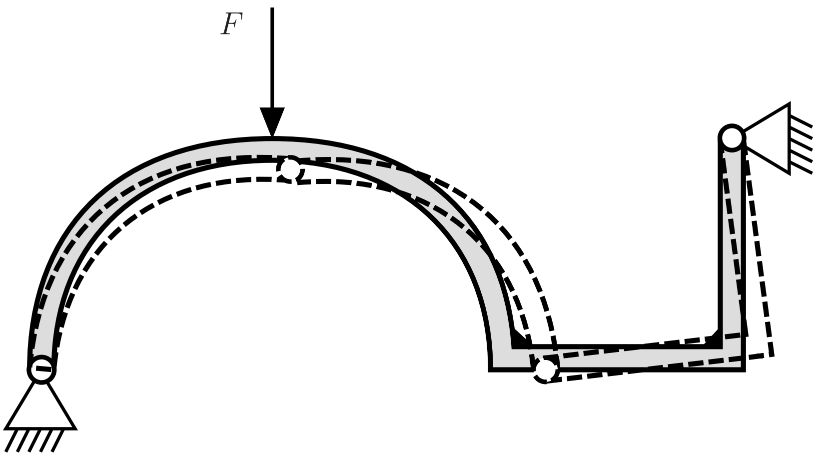
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

Skizzieren Sie nun zwei weitere, potentielle Fließgelenkketten für das System in der ausgelenkten Lage. Nutzen Sie dazu die aus Vorlesung und Übung bekannten potentiellen Stellen. **(1,0 Punkte)**





TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

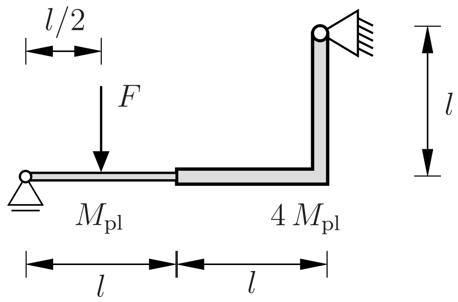
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

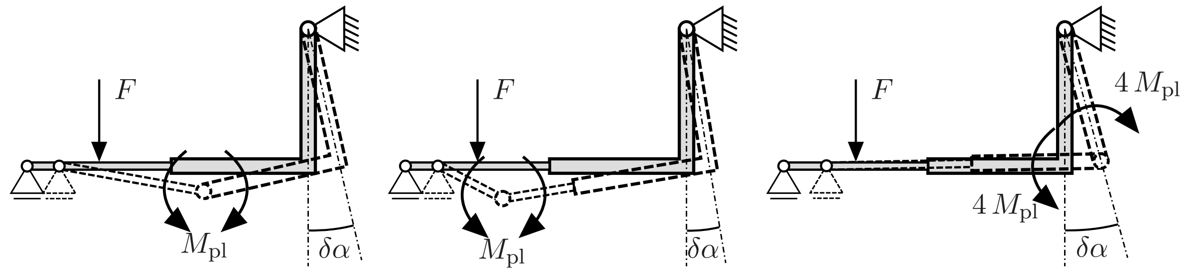
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

b) Der wie nebenstehend abgebildet gelenkig gelagerte Balken ist abgestuft und kann in den zwei Bereichen die angegebenen, vollplastischen Momente aufnehmen. Er ist außerdem durch eine Kraft F in der Mitte des ersten Bereichs belastet.



Im Folgenden sind bereits die möglichen Fließgelenkketten identifiziert und in ausgelenkter Lage skizziert. Ergänzen Sie die Zeichnungen um die wirkenden, plastischen Momente. **(1,5 Punkte)**



Bestimmen Sie nun für jede der oben abgebildeten Fließgelenkketten die virtuelle Arbeit δW in Abhängigkeit der virtuellen Verdrehung $\delta\alpha$. **(3,0 Punkte)**

$$\delta W_1\,(\delta\alpha) = \tfrac{1}{2}\,F\,l\,\delta\alpha - 2\,M_{pl}\,\delta\alpha$$

$$\delta W_2\,(\delta\alpha) = \tfrac{3}{2}\,F\,l\,\delta\alpha - 4\,M_{pl}\,\delta\alpha$$

$$\delta W_3\,(\delta\alpha) = -4\,M_{pl}\,\delta\alpha$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

Geben Sie für jede Fließgelenkkette die möglichen Traglasten F_{T} an. Bestimmen Sie abschließend die kritische Kraft F_{krit}, ab der das System unter den Annahmen der Fließgelenktheorie beweglich wird. **(2,0 Punkte)**

$F_{\mathrm{T},1} = 4\,\frac{M_{\mathrm{pl}}}{l}$

$F_{\mathrm{T},2} = \frac{8}{3}\,\frac{M_{\mathrm{pl}}}{l}$

$F_{\mathrm{T},3} = \infty$

$F_{\mathrm{krit}} = F_{\mathrm{T},2}$

c)
Ein Zug/-Druckstab wird in Achsenrichtung zunächst um 1% rein elastisch bis zur Initialfließgrenze σ_{y} gedehnt. Nun wird er plastisch bis zu einer Dehnung von 3% gezogen. Anschließend wird der Stab komplett entspannt. Geben Sie die verbleibende Dehnung ε_I des Stabes nach dem Entspannen an. Gehen Sie von einem ideal plastischem Materialmodell mit einem Elastizitätsmodul $E > 0$ aus. **(1,0 Punkte)**

$\varepsilon_I = 0.02$

Der Stab wird im Folgenden auf seine Ausgangslänge zurück gestaucht. Geben Sie die in ihm verbleibende Spannung σ_{II} an. **(0,5 Punkte)**

$\sigma_{\mathrm{II}} = -\sigma_{\mathrm{y}}$