TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

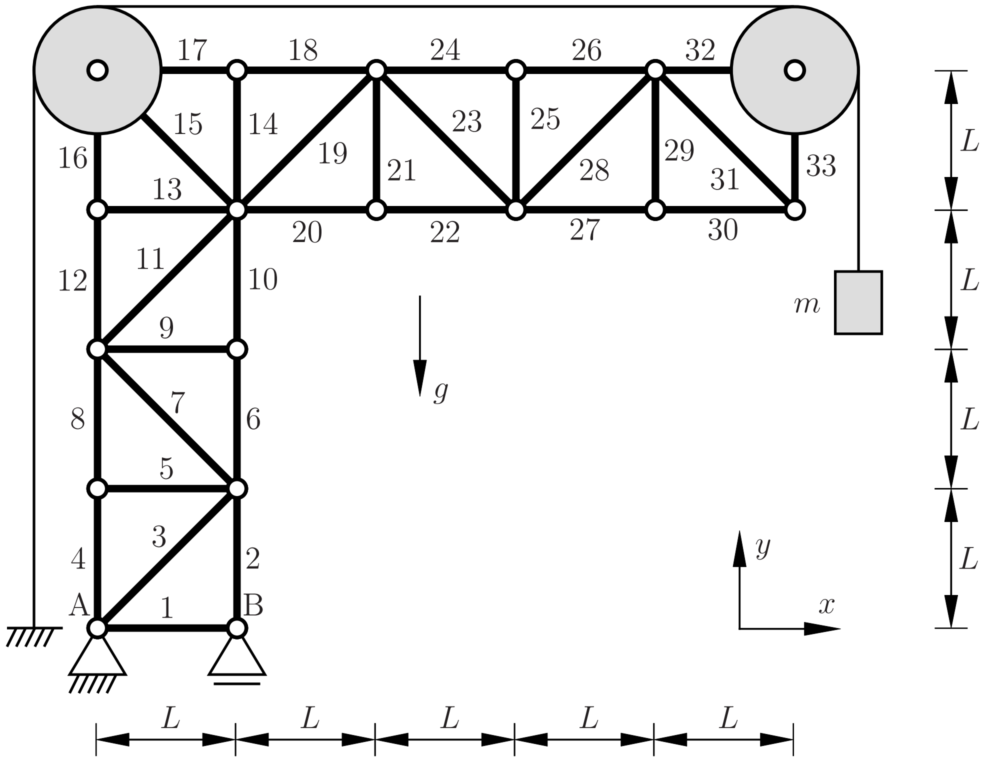
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)
Eine Masse m wird über ein Seil gehalten. Das Seil ist dabei über zwei masselose Umlenkrollen mit einer Krankonstruktion aus masselosen Stäben verbunden. Die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen.



Kreuzen Sie für die nachfolgenden Stäbe an, ob es sich bei diesen um Nullstäbe handelt, welche auf Grund gängiger Kriterien direkt als solche identifiziert werden können. **(1,0 Punkte)**

S_1	Ja ☒	Nein ☐
S_5	Ja ☒	Nein ☐
S_{19}	Ja ☐	Nein ☒
S_{30}	Ja ☐	Nein ☒

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

Berechnen Sie die Stabkräfte S_2, S_3, S_4, S_{22}, S_{23} und S_{24} unter der Konvention positiver Zugkräfte. Die Lagerreaktionen wurden dabei gemäß der positiven Koordinatenrichtungen bereits zu $A_x = 0$, $A_y = -3\,m\,g$ und $B_y = 5\,m\,g$ bestimmt. (**4,0 Punkte**)

$S_2 = -5\,m\,g$

$S_3 = 0$

$S_4 = 3\,m\,g$

$S_{22} = -3\,m\,g$

$S_{23} = \sqrt{2}\,m\,g$

$S_{24} = m\,g$

b)
Das rechts abgebildete System besteht aus zwei masselosen Balken. Die Belastung sowie die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen. Die Auflagerreaktionen wurden bereits bezüglich des globalen $x-y-$Koordinatensystems in positive Koordinatenrichtung zu

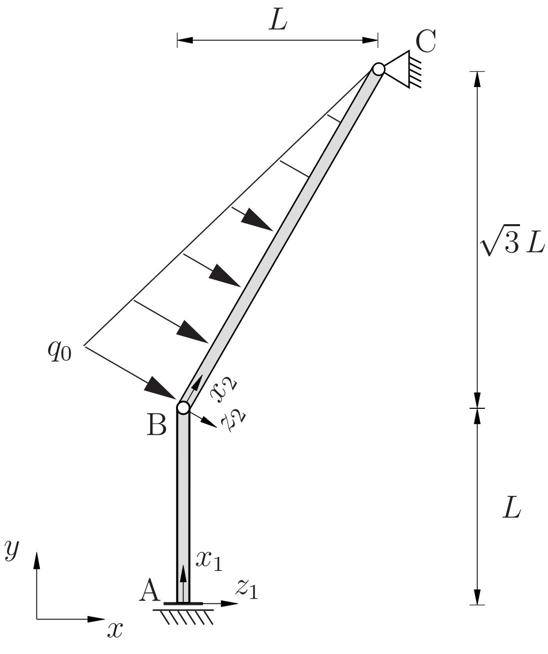
$$A_y = \frac{4}{3}\,q_0\,L$$

$$M_A = 0$$

$$C_x = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,q_0\,L$$

$$C_y = -\frac{5}{6}\,q_0\,L$$

berechnet.



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

Geben Sie den Querkraft- sowie den Momentenverlauf für beide Balken an. Verwenden Sie dazu die vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme und definieren Sie die von Ihnen eingeführten Bereiche bezüglich der Koordinaten. **(5,0 Punkte)**

Bereich I: $0 \leq x_1 \leq L$

$$Q_{\mathrm{I}}(x_1) = 0$$

$$M_{\mathrm{I}}(x_1) = 0$$

Bereich II: $0 \leq x_2 \leq 2\,L$

$$Q_{\mathrm{II}}(x_2) = \frac{1}{4}\,q_0\,\frac{x_2^2}{L} - q_0\,x_2 + \frac{2}{3}\,q_0\,L$$

$$M_{\mathrm{II}}(x_2) = \frac{1}{12}\,q_0\,\frac{x_2^3}{L} - \frac{1}{2}\,q_0\,x_2^2 + \frac{2}{3}\,q_0\,L\,x_2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

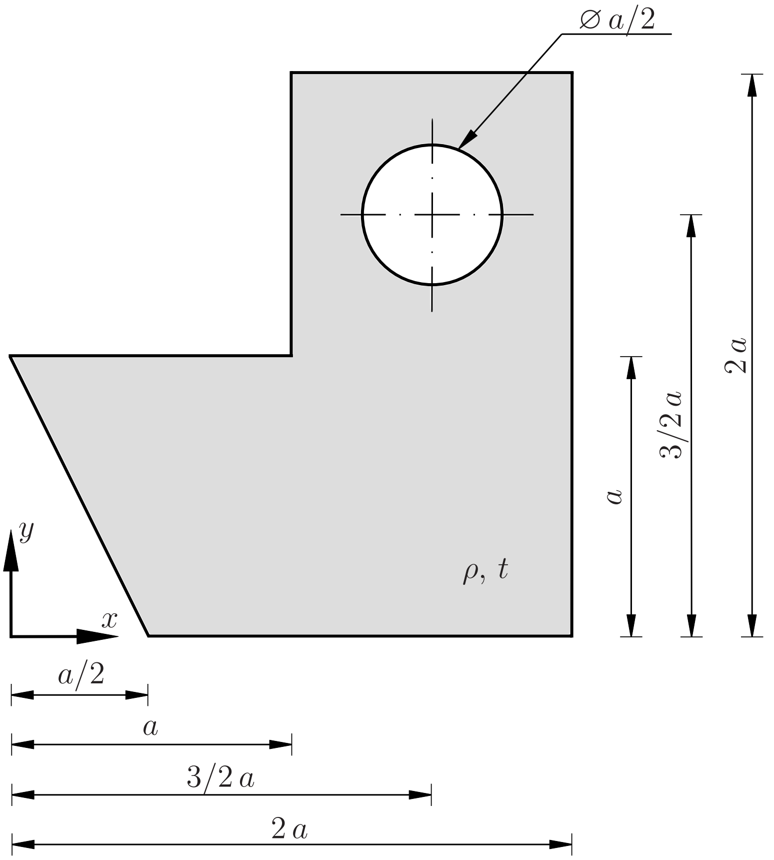
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)
Gegeben sei der abgebildete, massebehaftete Körper (Dichte ρ, Dicke t).



Geben Sie die Masse M und die Schwerpunktkoordinaten x_{S}, y_{S} des Körpers bezogen auf das angegebene Koordinatensystem an. Fassen Sie die einzelnen Terme dabei **nicht** zusammen. **(3,0 Punkte)**

$$M = \rho\, t\, \left[4\, a^2 - \frac{a^2}{4} - a^2 - \pi\, \frac{a^2}{16} \right]$$

$$x_{\mathrm{S}} = \frac{\rho\, t}{M}\, \left[4\, a^3 - \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{24} - \pi\, \frac{3\, a^3}{32} \right]$$

$$y_{\mathrm{S}} = \frac{\rho\, t}{M}\, \left[4\, a^3 - \frac{3\, a^3}{2} - \frac{a^3}{12} - \pi\, \frac{3\, a^3}{32} \right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

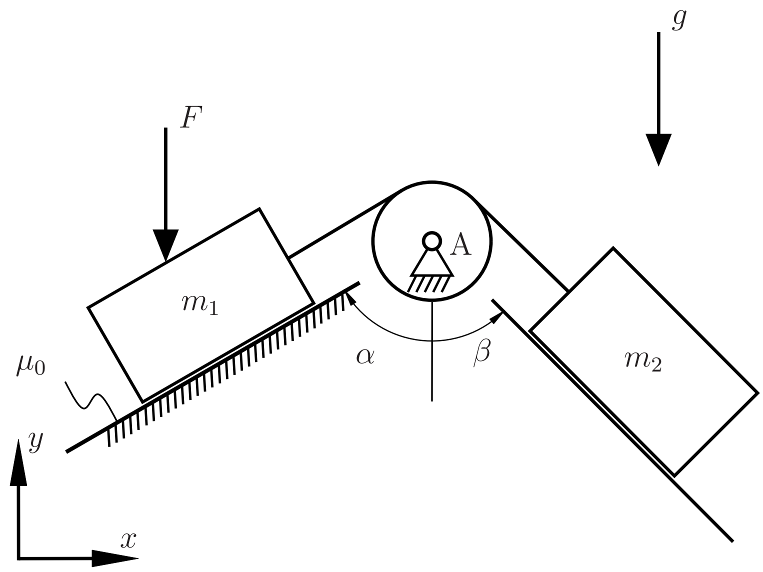
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

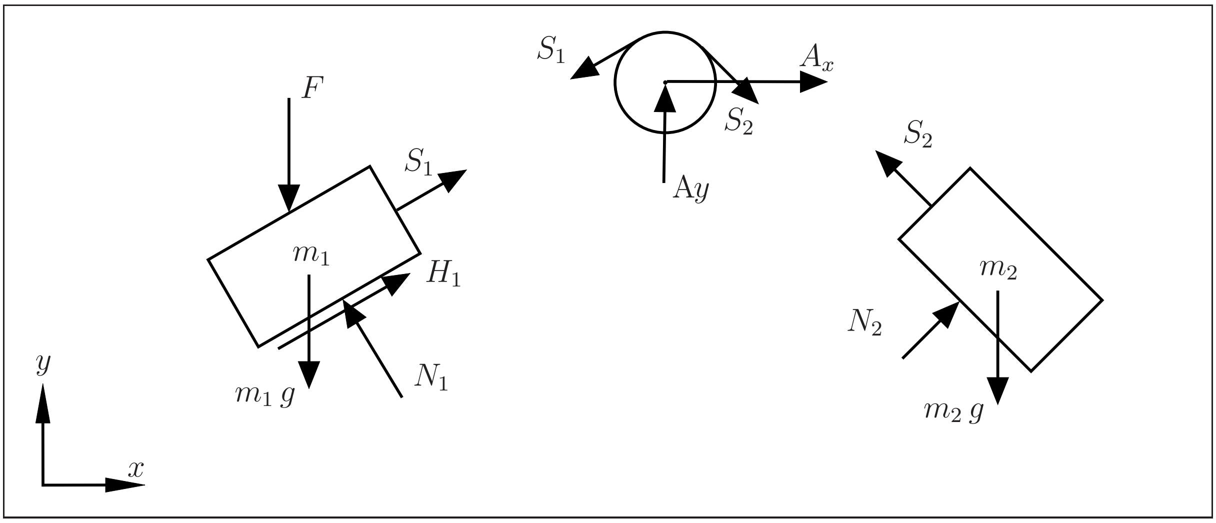
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

b)
In dem unten dargestellten System liegen zwei Körper mit bekannten Massen m_1 und m_2 jeweils auf einer schrägen Ebene (Winkel α, β). Das System befindet sich im Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung g). Masse m_1 wird zusätzlich durch eine Kraft F belastet. Der Haftreibungskoeffizient zwischen der Masse m_1 und der linken Ebene beträgt μ_0, die rechte Ebene soll als reibungsfrei angenommen werden. Die Massen sind über ein gespanntes Seil verbunden, welches über eine masselose Rolle umgelenkt wird.



Zeichnen Sie alle Kräfte in das bereitgestellte Freikörperbild ein. Es gilt die Annahme positiver Zugkräfte. **(2,0 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

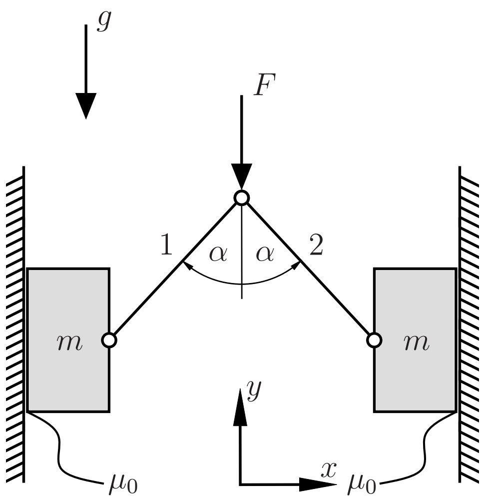
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

Geben Sie die Haftbedingung in Abhängigkeit von α, β, m_1, m_2, g, F und μ_0 in Form einer Ungleichung an. **(1,5 Punkte)**

$$|\cos(\alpha)\ [F + m_1\, g] - m_2\, g\, \cos(\beta)| \leq \mu_0\, \sin(\alpha)\ [F + m_1\, g]$$

c)
Ein anderes System im Erdschwerefeld (Erdbeschleunigung g) soll sich mittels Selbsthemmung über die Wandreibung in Ruhe befinden. Dafür wird zusätzlich eine Kraft F aufgeprägt, die über eine Stabkonstruktion (mit Winkel $\alpha \in (0, \pi/2)$) an massebehaftete Kufen (Masse m) übertragen wird.



Bestimmen Sie die Stabkräfte S_1 und S_2 unter der Annahme positiver Zugkräfte. **(1,0 Punkte)**

$S_1 = -\frac{F}{2\,\cos(\alpha)}$

$S_2 = S_1$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

Geben Sie die Haftbedingung des Systems in Abhängigkeit von m, g, F, μ_0 und α in Form einer Ungleichung an. **(1,5 Punkte)**

$$\left|m\,g + \frac{F}{2}\right| \leq \mu_0\,\frac{F}{2}\,\tan\left(\alpha\right)$$

Geben Sie die Gleichung für den Winkel $\alpha^\star$ in Abhängigkeit des Reibkoeffizienten μ_0 an, welche den **mindestens** benötigten Winkel angibt, sodass die Selbsthemmung des Systems bezüglich der Masse m gewährleistet ist. Nehmen Sie dafür an, dass für die Kraft $F = 6\,m\,g$ gilt. Weiterhin gilt $g > 0$, $m > 0$ und $\alpha \in (0,\ \pi/2)$.

(1,0 Punkte)

$$\alpha^\star\left(\mu_0\right) = \arctan\left(\frac{4}{3\,\mu_0}\right)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

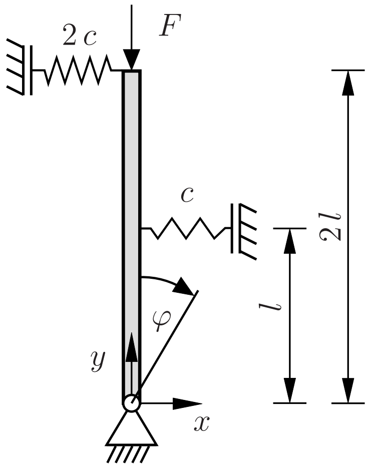
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

a)

Ein masseloser Balken (Länge $2\,l$) wird durch eine Vertikalkraft F belastet und seitlich durch zwei Federn (Federkonstanten c und $2\,c$) gehalten. Die Federn sind in der dargestellten Lage ($\varphi = 0$) ungespannt und bleiben stets horizontal ausgerichtet.



Begründen Sie kurz, warum es für dieses System möglich ist, die Stabilität der Gleichgewichtslagen mit den aus der Vorlesung und Übung bekannten Methoden zu überprüfen. Gehen Sie dabei insbesondere auf die Systemkomponenten und die Belastung ein. **(1,0 Punkte)**

Es handelt sich um ein konservatives System mit einem Freiheitsgrad, da die Kraft F und die Federkräfte wegunabhängig sind. Also kann ein Potential aufgestellt werden, mit dessen Hilfe Aussagen zur Stabilität von Gleichgewichtslagen gemacht werden können.

Bestimmen Sie das Gesamtpotential $\Pi(\varphi)$ des Systems. **(1,5 Punkte)**

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}\,c\,l^2\,\sin^2\varphi + 4\,c\,l^2\sin^2\varphi - 2\,F\,l\,[1 - \cos\varphi]$$

Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen φ_* für den Bereich $\varphi \in [0, \pi/2)$. Dabei sei die Kraft $F = 9/4\,c\,l$. **(1,5 Punkte)**

$$\frac{\partial\,\Pi}{\partial\,\varphi} = \sin\varphi\,[9\,c\,l^2\,\cos\varphi - 2\,F\,l] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = 0^\circ \quad \vee \quad \varphi_2 = 60^\circ$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Untersuchen Sie diese Gleichgewichtslagen hinsichtlich Stabilität. **(1,5 Punkte)**

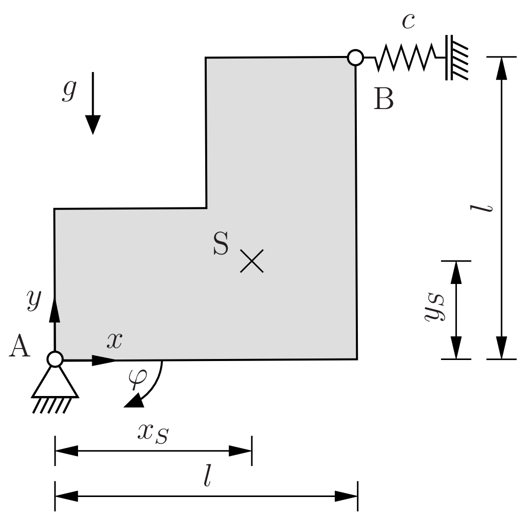
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} = \cos\varphi\,[9\,c\,l^2\,\cos\varphi - \frac{9}{2}\,c\,l^2\,] + \sin\varphi\,[-9\,c\,l^2\,\sin\varphi]$$

$$\varphi_1 = 0^\circ: \qquad \frac{9}{2}\,c\,l^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{stabil}$$

$$\varphi_2 = 60^\circ: \qquad -\frac{27}{4}\,c\,l^2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{instabil}$$

b)

Die dargestellte homogene Scheibe ist in Punkt A drehbar gelagert und im Punkt B mit einer Feder (Federsteifigkeit c) verbunden. Die Schwerpunktskoordinaten x_S und y_S bezüglich des gegebenen Koordinatensystems werden als bekannt vorausgesetzt. Das System besitzt den Rotationsfreiheitsgrad φ und ist in seiner Ausgangslage $\varphi = 0$ dargestellt.



Geben Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_S$ des Schwerpunkts S gemäß des eingezeichneten Koordinatensystems in Abhängigkeit des Freiheitsgrads φ an. **(1,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{r}_S = \begin{bmatrix} \cos\varphi\,x_S + \sin\varphi\,y_S \\ -\sin\varphi\,x_S + \cos\varphi\,y_S \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die virtuelle Verrückung $\delta\boldsymbol{r}_S$ von S in Abhängigkeit des Freiheitsgrads φ. **(1,0 Punkte)**

$$\delta\boldsymbol{r}_S = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\,x_S + \cos\varphi\,y_S \\ -\cos\varphi\,x_S - \sin\varphi\,y_S \end{bmatrix} \delta\varphi \approx \begin{bmatrix} y_S \\ -x_S \end{bmatrix} \delta\varphi$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

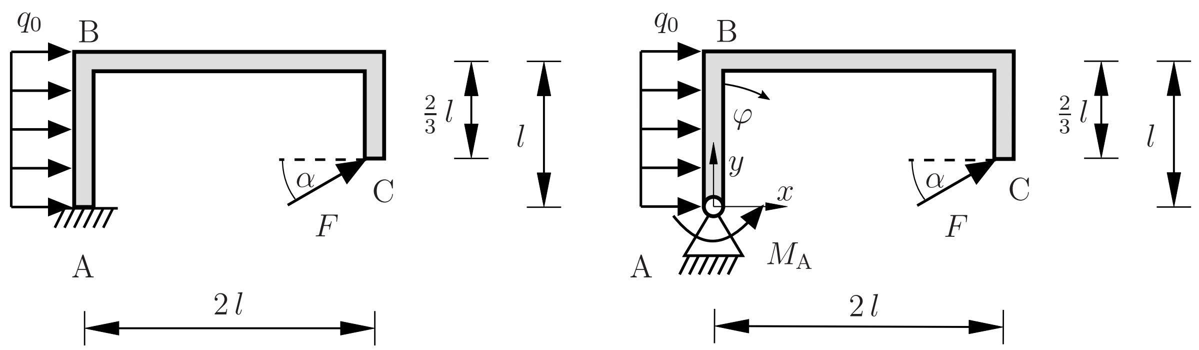
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

c)

Der dargestellte Rahmen ist durch eine konstante Linienlast q_0 und eine Kraft F belastet. Gemäß des Prinzips der virtuellen Arbeit wurde die Einspannung in Punkt A des Originalsystems (links) im Ersatzsystem (rechts) durch ein Festlager sowie ein wirkendes Moment M_A ersetzt.

Originalsystem: Ersatzsystem:



Die virtuellen Verrückungen der Punkte B und C wurden bereits bestimmt zu:

$$\delta \boldsymbol{r}_B = l\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_x + 0\,\boldsymbol{e}_y$$

$$\delta \boldsymbol{r}_C = \frac{1}{3}\,l\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_x - 2\,l\,\delta\varphi\;\boldsymbol{e}_y$$

Bestimmen Sie die virtuelle Arbeit δW des Systems. **(1,5 Punkte)**

$$\delta W = -M_A\delta\varphi + \frac{1}{2}\,q_0\,l^2\,\delta\varphi + \left[\frac{1}{3}\,l\,\cos\alpha - 2\,l\,\sin\alpha\right]\,F\,\delta\varphi$$

Bestimmen Sie das Moment M_A. **(1,0 Punkte)**

$$M_A = \frac{1}{2}\,q_0\,l^2 + \left[\frac{1}{3}\,l\,\cos\alpha - 2\,l\,\sin\alpha\right]\,F$$