TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

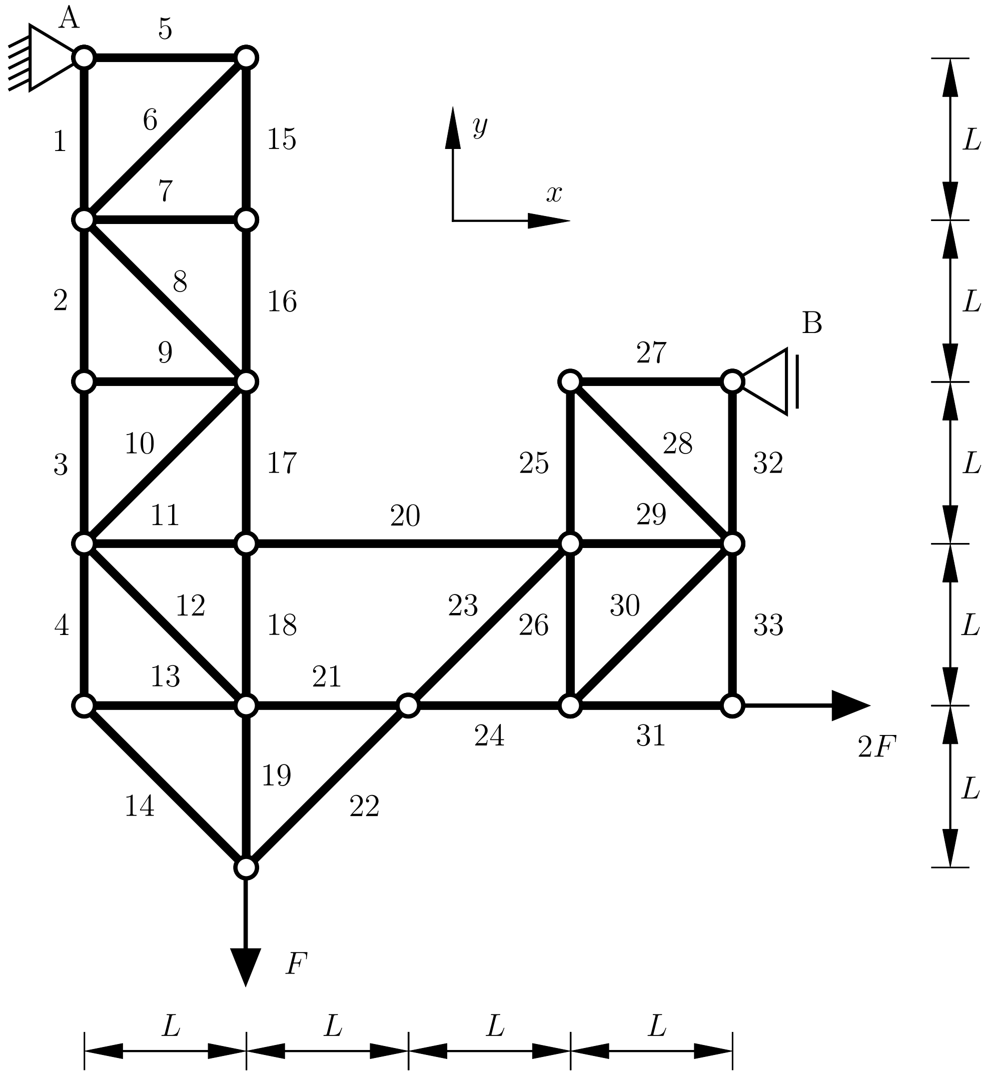
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

a)
Es soll das nachfolgende Fachwerk berechnet werden. Die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen.



Kreuzen Sie für die nachfolgenden Stäbe an, ob es sich bei diesen um Nullstäbe handelt, welche auf Grund gängiger Kriterien direkt als solche identifiziert werden können. **(1,0 Punkte)**

S_9	Ja ☒	Nein ☐
S_{13}	Ja ☐	Nein ☒
S_{27}	Ja ☐	Nein ☒
S_{32}	Ja ☒	Nein ☐

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

Berechnen Sie die Stabkräfte S_1, S_5, S_6, S_{20}, S_{21} und S_{22} unter der Konvention positiver Zugkräfte. Die Lagerreaktionen wurden dabei gemäß der positiven Koordinatenrichtungen bereits zu $A_x = 1{,}5\,F$, $A_y = F$ und $B_x = -3{,}5\,F$ bestimmt. **(4,0 Punkte)**

$S_1 = F$

$$S_5 = -\frac{3}{2}\,F$$

$$S_6 = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,F$$

$S_{20} = -7\,F$

$$S_{21} = \frac{11}{2}\,F$$

$S_{22} = 0$

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

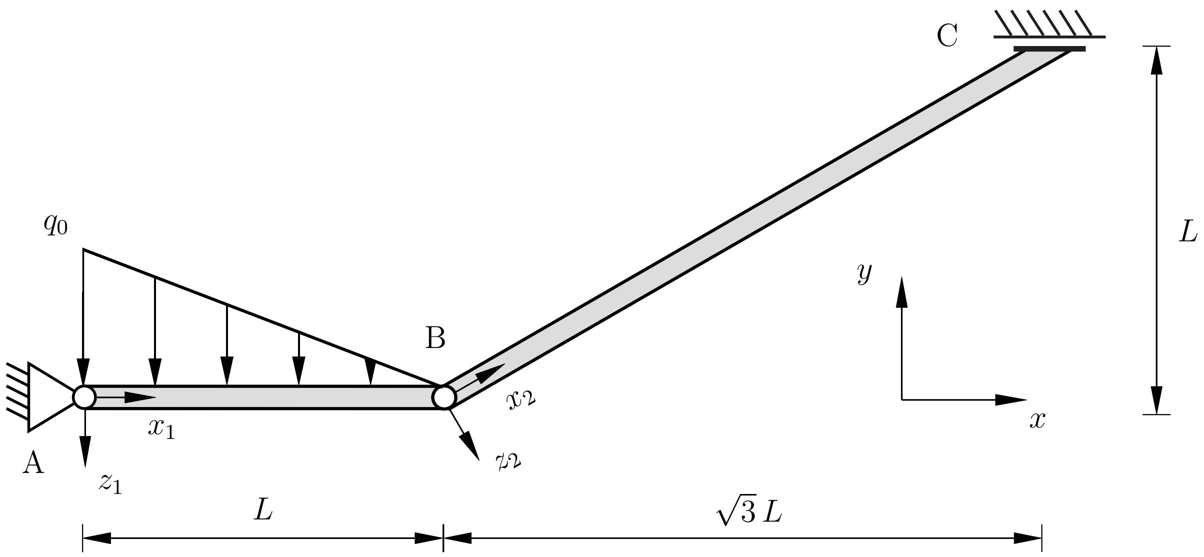
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

b)
Das unten abgebildete System besteht aus zwei masselosen Balken. Die Belastung sowie die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen. Die Auflagerreaktionen wurden bereits bezüglich des globalen $x-y-$Koordinatensystems in positive Koordinatenrichtung berechnet:

$$A_x = 0 \qquad A_y = \frac{1}{3}\, q_0\, L$$

$$C_y = \frac{1}{6}\, q_0\, L \qquad M_C = -\frac{\sqrt{3}}{6}\, q_0\, L^2$$



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

Geben Sie den Querkraft- sowie den Momentenverlauf für beide Balken an. Verwenden Sie dazu die vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme und definieren Sie die von Ihnen eingeführten Bereiche bezüglich der Koordinaten. **(5,0 Punkte)**

Bereich I: $0 \leq x_1 \leq L$

$$Q_{\mathrm{I}}(x_1) = \frac{1}{2}\, q_0\, \frac{x_1^2}{L} - q_0\, x_1 + \frac{1}{3}\, q_0\, L$$

$$M_{\mathrm{I}}(x_1) = \frac{1}{6}\, q_0\, \frac{x_1^3}{L} - \frac{1}{2}\, q_0\, x_1^2 + \frac{1}{3}\, q_0\, L\, x_1$$

Bereich II: $0 \leq x_2 \leq 2\,L$

$$Q_{\mathrm{II}}(x_2) = -\frac{\sqrt{3}}{12}\, q_0\, L$$

$$M_{\mathrm{II}}(x_2) = -\frac{\sqrt{3}}{12}\, q_0\, L\, x_2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

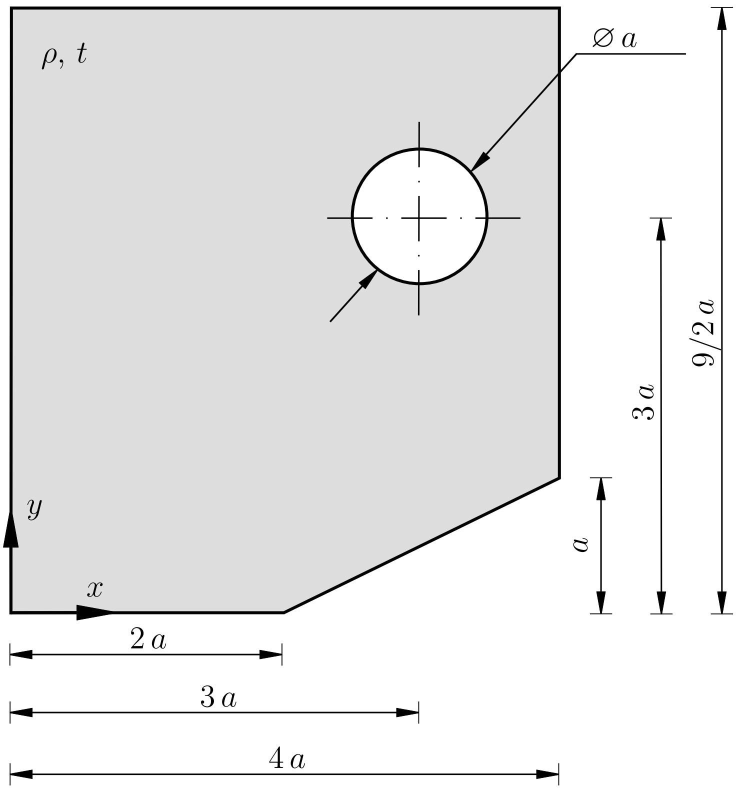
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)
Gegeben sei der abgebildete, massebehaftete Körper (Dichte ρ, Dicke t).



Geben Sie die Masse M und die Schwerpunktkoordinaten x_S, y_S des Körpers bezogen auf das angegebene Koordinatensystem an. Fassen Sie die einzelnen Terme dabei **nicht** zusammen. **(3,0 Punkte)**

$$M = \rho\, t\, \left[18\, a^2 - \pi\, \frac{a^2}{4} - a^2\right]$$

$$x_\mathrm{S} = \frac{\rho\, t}{M}\, \left[36\, a^3 - \pi\, \frac{3\, a^3}{4} - \frac{10\, a^3}{3}\right]$$

$$y_\mathrm{S} = \frac{\rho\, t}{M}\, \left[\frac{81\, a^3}{2} - \pi\, \frac{3\, a^3}{4} - \frac{a^3}{3}\right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

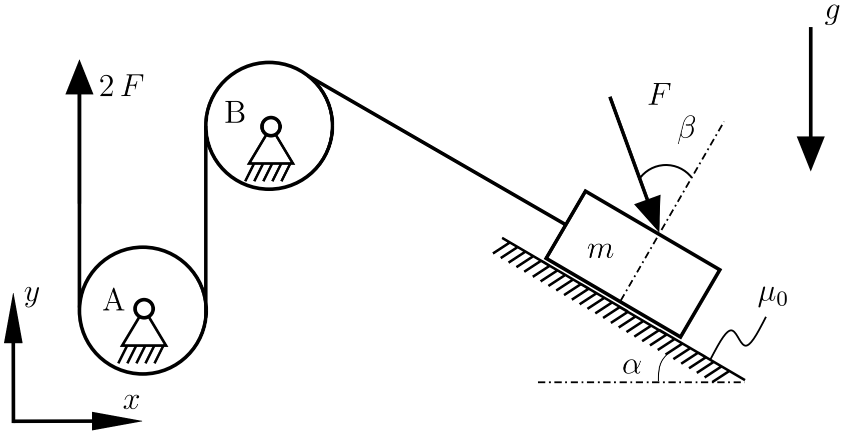
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

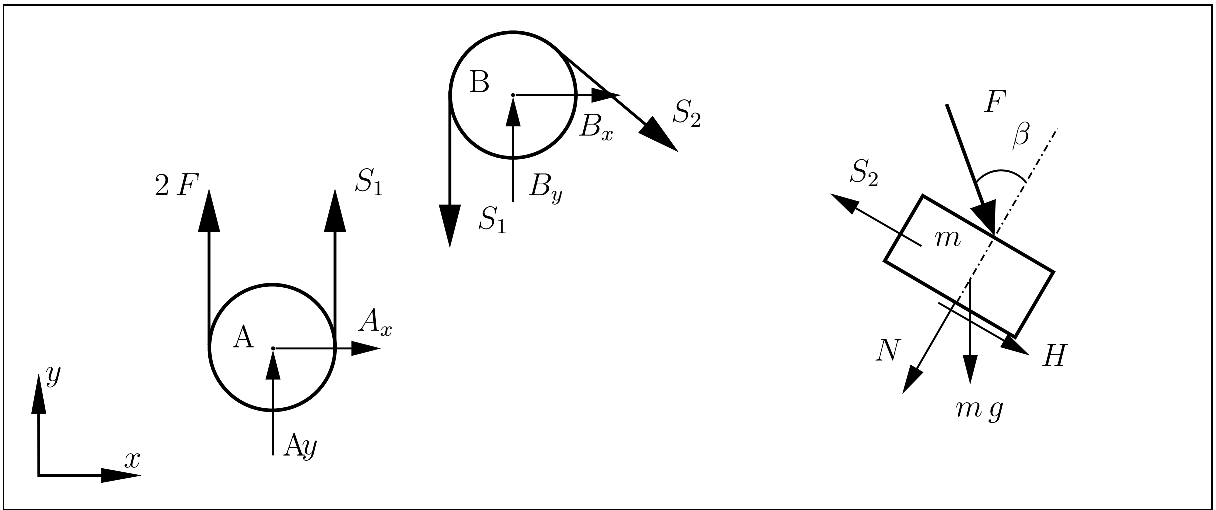
Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

b)

In dem nachfolgend abgebildeten System ist eine Masse m mit einem dehnstarren Seil über zwei Umlenkrollen verbunden und wird mit einer Kraft $2\,F$ am Ende belastet. Die Masse m liegt auf einer schiefen Ebene (Winkel $0 < \alpha < \pi/2$) und wird zusätzlich unter dem Winkel $0 < \beta < \pi/2$ durch eine Kraft F belastet. Der Haftreibungskoeffizient zwischen der Masse m und der Ebene beträgt μ_0. Das System befindet sich im Schwerefeld g. Mit Ausnahme der Masse m sind alle Komponenten als masselos anzusehen.



Zeichnen Sie alle Kräfte in das unten bereitgestellte Freikörperbild ein. Es gilt die Annahme positiver Zugkräfte in den Seilen. **(2,0 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

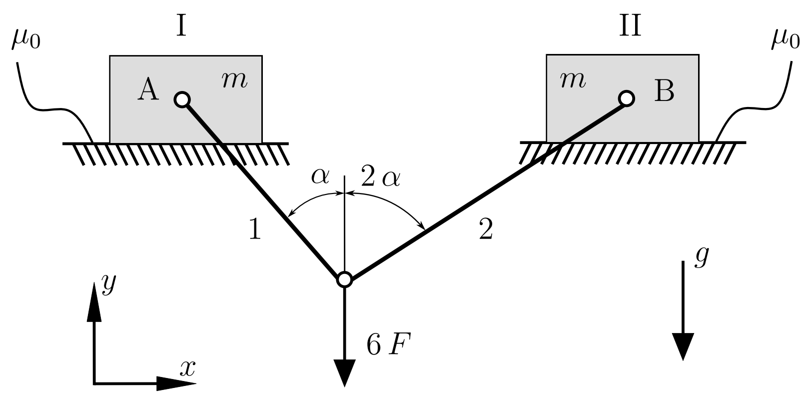
Matr.-Nr.: ____________________

Geben Sie die Haftbedingung in Abhängigkeit von α, β, m_1, m_2, g, F und μ_0 in Form einer Ungleichung an. **(1,5 Punkte)**

$$|2\,F - F\sin(\beta) - m\,g\sin(\alpha)| \leq \mu_0\,[F\cos(\beta) + m\,g\cos(\alpha)]$$

c)

Gegeben sei das unten abgebildete System bestehend aus zwei Körpern (I, II) mit der Masse m, welche sich auf einer reibungsbehafteten Ebene (Haftreibungskoeffizient μ_0) befinden. Die Massen sind in den Punkten A und B über zwei masselose Stäbe verbunden an denen die Kraft $6\,F$ angreift. Der Winkel zwischen den Stäben beträgt $0 < 3\,\alpha < \pi$.



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

Geben Sie die Haftbedingungen des Systems in Abhängigkeit von m, g, F, und μ_0 in Form einer Ungleichung an. Dafür wurden die Stabkräfte bereits zu $S_1 = 6\,F\cos(\alpha)$ und $S_2 = 3\,F$, für den speziellen Fall von $\alpha = \pi/6$, berechnet. **(2,0 Punkte)**

$$\text{Körper I:} \quad \left|\frac{3\sqrt{3}}{2}\,F\right| \leq \mu_0\left[m\,g + \frac{9}{2}F\right]$$

$$\text{Körper II:} \quad \left|\frac{3\sqrt{3}}{2}\,F\right| \leq \mu_0\left[m\,g + \frac{3}{2}F\right]$$

Begründen Sie für welchen Körper die Haftbedingung bei einem Winkel von $\alpha = \pi/6$ zuerst versagt. Es gilt $F > 0$, $g > 0$. Geben Sie für diesen Körper den Grenzwert für den Haftreibungskoeffizient $\mu^\star$ an, sodass dieser Körper sich gerade nicht bewegt. **(1,5 Punkte)**

$$\text{Körper II:} \quad \mu^\star = \frac{3\sqrt{3}\,F}{2}\,\frac{1}{mg + 3/2\,F}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

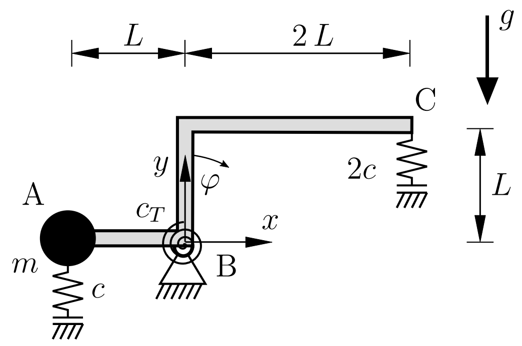
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

a)
Ein masseloser Rahmen ist wie dargestellt gelagert. In den Punkten A und C sind Zug-Druck-Federn angebracht (Federsteifigkeit c und $2c$). In Punkt B befindet sich eine Drehfeder (Drehfedersteifigkeit c_T). Alle Federn sind in der dargestellten Lage als ungespannt anzusehen. Des Weiteren ist am linken Ende des Rahmens eine Punktmasse (Masse m) angebracht.



Hinweis: Die Ergebnisse sollen **nicht** linearisiert werden.

Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_\mathrm{A}$ und $\boldsymbol{r}_\mathrm{C}$ in Abhängigkeit von φ. **(1,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{A} = -\cos(\varphi)L\boldsymbol{e}_x + \sin(\varphi)L\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{C} = (\sin(\varphi)L + 2\cos(\varphi)L)\boldsymbol{e}_x + (\cos(\varphi)L - 2\sin(\varphi)L)\boldsymbol{e}_y$$

Bestimmen Sie ein Gesamtpotential $\Pi(\varphi)$ für das Systems. Fassen Sie die einzelnen Terme nicht weiter zusammen. **(2,0 Punkte)**

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}cL^2\sin^2(\varphi) + \frac{1}{2}c_T\varphi^2 + cL^2(1-\cos(\varphi)+2\sin(\varphi))^2 + mgL\sin(\varphi)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

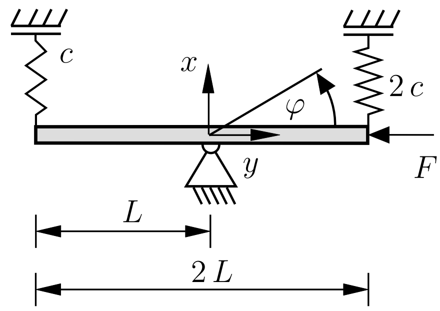
Bestimmen Sie die virtuellen Verrückungen der Punkte A und C in Abhängigkeit des Freiheitsgrades φ. **(1,5 Punkte)**

$$\delta \boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = \sin(\varphi) L \delta\varphi \boldsymbol{e}_x + \cos(\varphi) L \delta\varphi \boldsymbol{e}_y$$

$$\delta \boldsymbol{r}_{\mathrm{C}} = (\cos(\varphi) - 2\sin(\varphi)) L \delta\varphi \boldsymbol{e}_x - (\sin(\varphi) + 2\cos(\varphi)) L \delta\varphi \boldsymbol{e}_y$$

b)

Ein masseloser Balken (Länge $2\,L$) wird durch eine Horizontalkraft F belastet und seitlich durch zwei Federn (Federkonstanten c und $2\,c$) gehalten. Die Federn sind in der dargestellten Lage ($\varphi = 0$) ungespannt und bleiben stets vertikal ausgerichtet.



Das Potential der Federn im System ist mit $\Pi_f(\varphi) = \dfrac{3}{2} c \,(L \sin(\varphi))^2$ gegeben.

Für welche Kraft F befindet sich das System in der Position $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ im Gleichgewicht? **(1,5 Punkte)**

$$\Pi(\varphi) = \frac{3}{2} c \,(L \sin(\varphi))^2 + LF(\cos(\varphi) - 1)$$
$$\delta\Pi = 0 \Leftrightarrow F = 3cL\cos(\varphi)$$
$$F = \frac{3}{2} L c \sqrt{2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

Untersuchen Sie diese Gleichgewichtslage auf Stabilität. Geben Sie dabei relevante Zwischenschritte an. (**1,5 Punkte**)

$$
\begin{aligned}
\delta^2\Pi &= -FL\cos(\varphi) + 3cL^2\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right) \\
&= -\frac{3}{2}cL^2 < 0 \Rightarrow \text{ instabil!}
\end{aligned}
$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

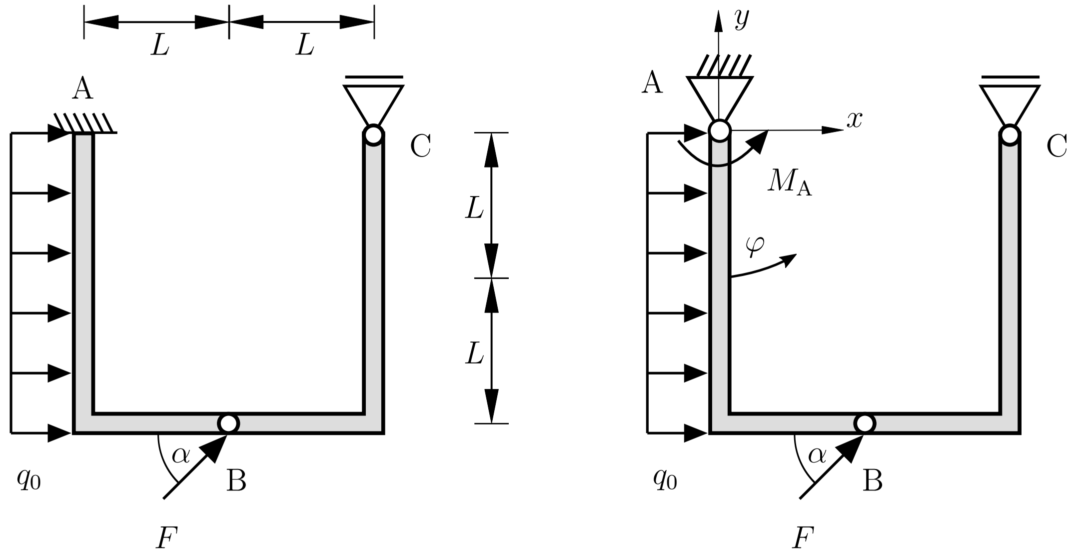
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

c)

Der dargestellte Rahmen ist durch eine konstante Linienlast q_0 und eine Kraft F belastet. Gemäß des Prinzips der virtuellen Arbeit wurde die Einspannung in Punkt A des Originalsystems (links) im Ersatzsystem (rechts) durch ein Festlager sowie ein wirkendes Moment M_A ersetzt.

Originalsystem: Ersatzsystem:



Die virtuelle Verrückung von Punkt B wurde bereits bestimmt zu:

$$\delta \boldsymbol{r}_B = 2\,L\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_x + L\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_y$$

Bestimmen Sie die virtuelle Arbeit δW des Systems in der dargestellten Lage. **(1,5 Punkte)**

$$\begin{aligned}\delta W &= \delta\varphi M_\mathrm{A} + 2q_0 L\delta\varphi L + \delta\boldsymbol{r}_\mathrm{B}\cdot F\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}\\ &= \delta\varphi\left(M_\mathrm{A} + 2q_0L^2 + FL(2\cos(\alpha)+\sin(\alpha))\right)\end{aligned}$$

Bestimmen Sie das Moment M_A. **(1,0 Punkte)**

$$M_\mathrm{A} = -2q_0L^2 - FL(2\cos(\alpha)+\sin(\alpha))$$