TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

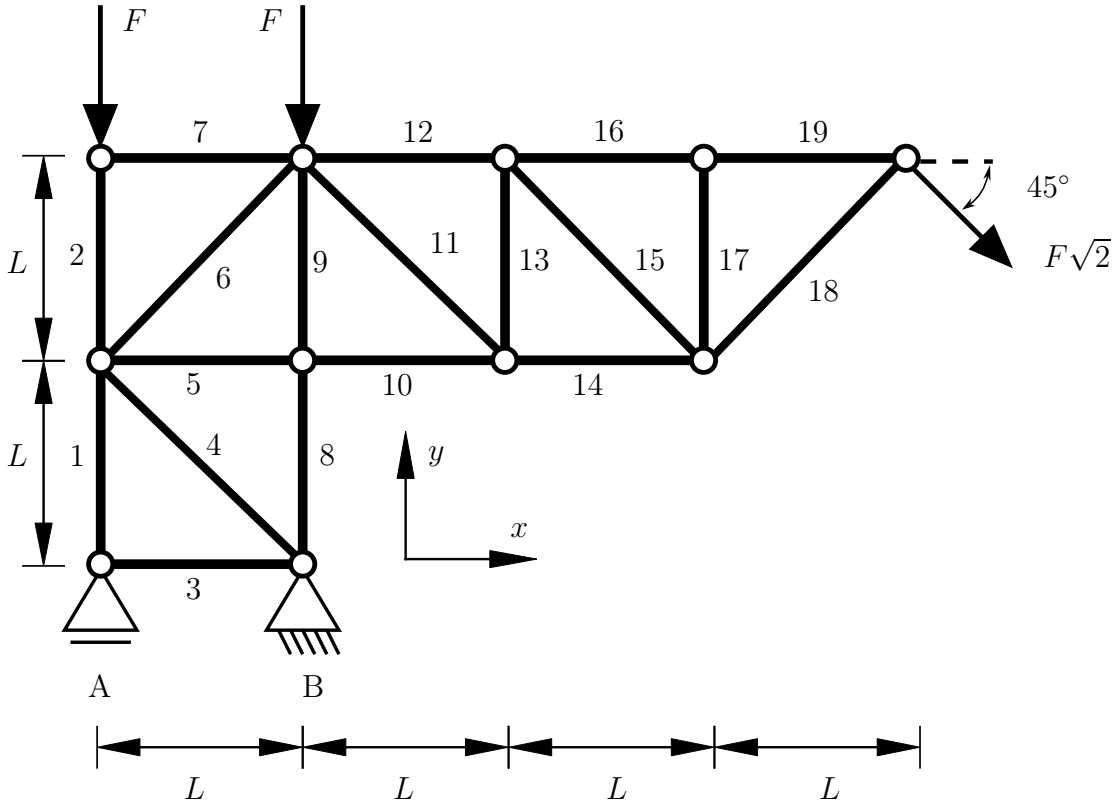
Vorname: _____

Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

a)
Es soll das nachfolgende Fachwerk berechnet werden. Die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen.



Geben Sie sämtliche Nullstäbe an, welche aufgrund gängiger Kriterien direkt als solche identifiziert werden können (keine Rechnung). (**1,5 Punkte**)

3,7, 17

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: _____

Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

Berechnen Sie die Stabkräfte $\{S_1, S_4, S_8\}$ und $\{S_{12}, S_{13}, S_{14}\}$ unter der Konvention positiver Zugkräfte. Die Lagerreaktionen wurden dabei gemäß der positiven Koordinatenrichtungen bereits zu $A_y = -4\,F$, $B_x = -F$ und $B_y = 7\,F$ bestimmt. (**3,0 Punkte**)

$S_1 = 4\,F$

$S_4 = -\sqrt{2}\,F$

$S_8 = -6\,F$

$S_{12} = 3\,F$

$S_{13} = -\,F$

$S_{14} = -2\,F$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

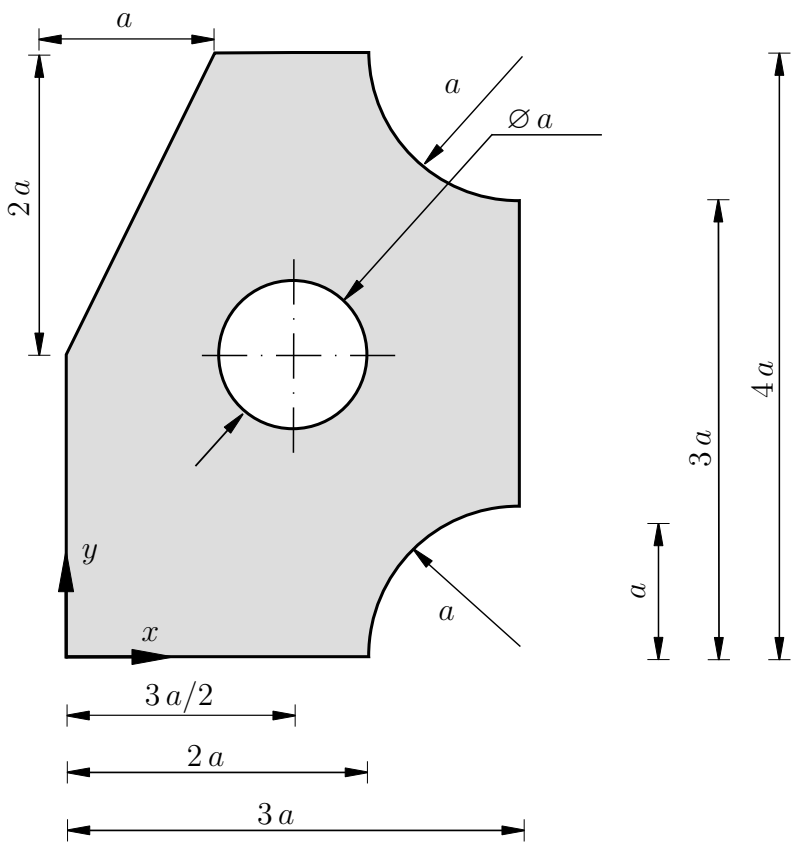
Vorname: _____

Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

b)



Gegeben sei der oben abgebildete Körper. Geben Sie den Flächeninhalt A und die Schwerpunktkoordinate x_S des Körpers bezogen auf das angegebene Koordinatensystem an. Fassen Sie die einzelnen Terme dabei **nicht** zusammen. (**2,0 Punkte**)

$$A = 12\,a^2 - a^2 - \pi\,\frac{a^2}{4} - \frac{\pi}{4}\,a^2 - \frac{\pi}{4}\,a^2$$

$$x_S = \left[18\,a^3 - \frac{1}{3}\,a^3 - \frac{3}{8}\,\pi\,a^3 - \left[\frac{3}{4}\,\pi - \frac{1}{3}\right]a^3 - \left[\frac{3}{4}\,\pi - \frac{1}{3}\right]a^3\right]/A$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: _____

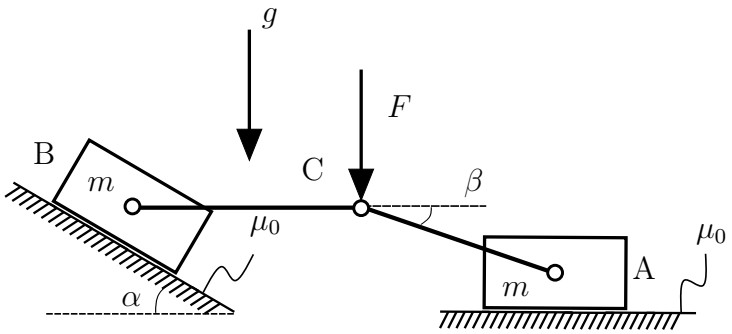
Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

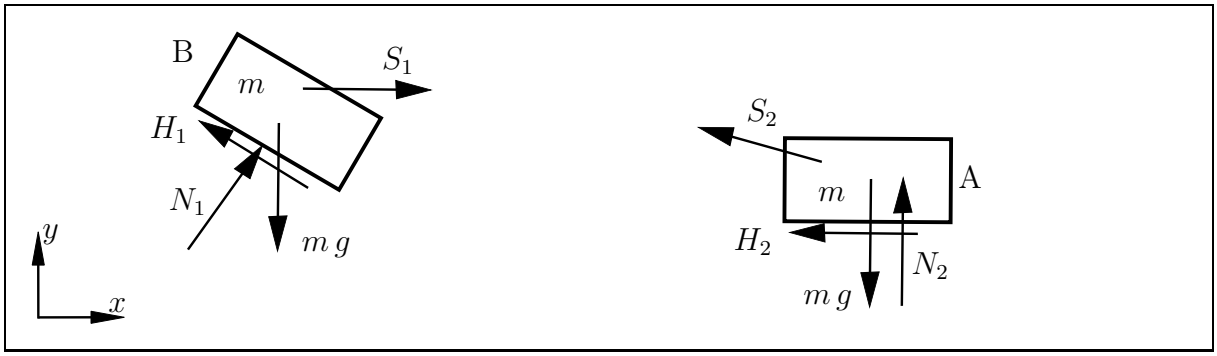
Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

c)

In dem dargestellten System sind zwei Massen m über eine Gelenkkonstruktion miteinander verbunden, welche mit einer Kraft F wie dargestellt belastet wird. Die linke Masse liegt auf einer schiefen schiefen Ebene (Winkel $0 < \alpha < \pi/2$). Der Haftreibungskoeffizient zwischen den Massen und den Ebenen beträgt μ_0. Das System befindet sich im Schwerefeld g. Mit Ausnahme der beiden Massen m sind alle Komponenten als masselos anzusehen.



Zeichnen Sie alle Kräfte in das unten bereitgestellte Freikörperbild ein. (**1,0 Punkte**)



Geben Sie die Haftbedingungen in Abhängigkeit von α, β, m, g, F und μ_0 in Form von Ungleichungen an. (**2,5 Punkte**)

$|H_1| \leq \mu_0 N_1 \quad \left| m\,g \sin(\alpha) - F \frac{\cos(\alpha)}{\tan(\beta)} \right| \leq \mu_0 \left[m\,g \cos(\alpha) - F \frac{\sin(\alpha)}{\tan(\beta)} \right]$

$|H_2| \leq \mu_0 N_2 \quad \left| \frac{F}{\tan(\beta)} \right| \leq \mu_0 \left[m\,g + F \right]$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

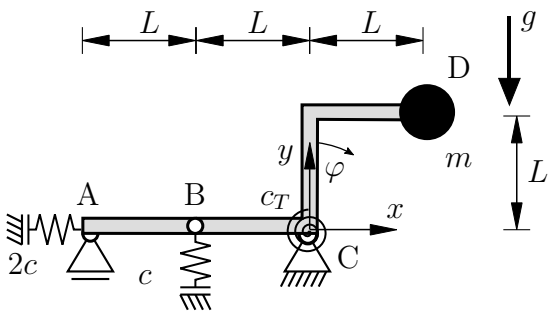
Vorname: _____

Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)
Ein masseloser, gelenkiger Rahmen ist wie dargestellt gelagert. In den Punkten A und B sind Zug-Druck-Federn angebracht (Federsteifigkeit $2c$ und c). Im Punkt C befindet sich eine Drehfeder (Drehfedersteifigkeit c_T). Alle Federn sind in der dargestellten Lage ungespannt. Des Weiteren ist am rechten Ende des Rahmens eine Punktmasse (Masse m) angebracht.



Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_\mathrm{A}$ und $\boldsymbol{r}_\mathrm{D}$ in Abhängigkeit von φ.
Hinweis: Die Ergebnisse sollen **nicht** zusätzlich linearisiert werden. (**1,0 Punkte**)

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{A} = -2L\cos(\varphi)\boldsymbol{e}_x + 0\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{r}_\mathrm{D} = L(\sin(\varphi) + \cos(\varphi))\boldsymbol{e}_x + L(\cos(\varphi) - \sin(\varphi))\boldsymbol{e}_y$$

Bestimmen Sie die virtuellen Verrückungen der Punkte A und D in Abhängigkeit des Freiheitsgrades φ.
Hinweis: Die Ergebnisse sollen **nicht** zusätzlich linearisiert werden. (**1,5 Punkte**)

$$\delta\boldsymbol{r}_\mathrm{A} = 2\sin(\varphi)L\delta\varphi\boldsymbol{e}_x + 0\boldsymbol{e}_y$$

$$\delta\boldsymbol{r}_\mathrm{D} = L\delta\varphi(\cos(\varphi) - \sin(\varphi))\boldsymbol{e}_x + L\delta\varphi(-\sin(\varphi) - \cos(\varphi))\boldsymbol{e}_y$$

Vorname: _____

Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Bestimmen Sie ein Gesamtpotential $\Pi(\varphi)$ für das System. Fassen Sie die einzelnen Terme nicht weiter zusammen. (**2,0 Punkte**)

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}c_T\varphi^2 + \frac{1}{2}cL^2\sin(\varphi)^2 + 4cL^2(1-\cos(\varphi))^2 + mgL(\cos(\varphi) - \sin(\varphi))$$

b)

Für ein nicht näher spezifiziertes System ist das folgende Potential gegeben:

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}cL^2\left(\sin(\varphi) - 1\right)^2 + mgL\sin(\varphi)$$

Die Masse wurde zu $m = \dfrac{cL}{2g}$ bestimmt.

Bestimmen Sie alle Winkel $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, für die sich das System im Gleichgewicht befindet. Geben Sie dabei relevante Zwischenschritte an. (**1,5 Punkte**)

$$\begin{aligned}
&\Pi'(\varphi) = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 = cL^2\cos(\varphi)(\sin(\varphi) - 1) + mgL\cos(\varphi) \\
&\Leftrightarrow 0 = \cos(\varphi)\left(\sin(\varphi) - \frac{1}{2}\right)cL^2 \\
&\Rightarrow \cos(\varphi_1) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \\
&\Rightarrow \sin(\varphi_2) = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: _____

Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

Untersuchen Sie die zuvor ermittelte(n) Gleichgewichtslage(n) auf Stabilität. Geben Sie dabei relevante Zwischenschritte an. (**1,5 Punkte**)

Überprüfen von $\Pi''(\varphi) \lesseqqgtr 0$

$$\Pi''(\varphi) = cL^2 \left(-\sin(\varphi)^2 + \frac{1}{2}\sin(\varphi) + \cos(\varphi)^2 \right)$$

$$\Pi''(\varphi_1) = cL^2 \left(-1^2 + \frac{1}{2} + 0^2 \right) = -\frac{1}{2}cL^2 < 0$$

$\Rightarrow \varphi_1$ ist ein instabiler Zustand!

$$\Pi''(\varphi_2) = cL^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) = cL^2 \frac{3}{4} > 0$$

$\Rightarrow \varphi_2$ ist ein stabiler Zustand!

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: _____

Nachname: _____

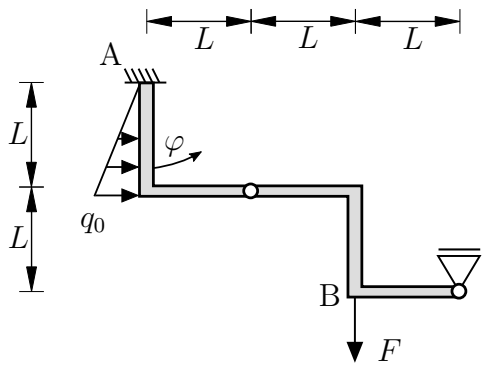
Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

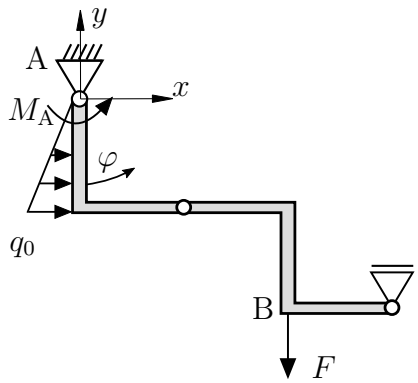
c)

Der dargestellte Rahmen ist durch eine lineare Linienlast mit dem Maximalwert q_0 und eine Kraft F belastet. Gemäß dem Prinzip der virtuellen Arbeit wurde die Einspannung in Punkt A des Originalsystems (links) im Ersatzsystem (rechts) durch ein Festlager sowie ein wirkendes Moment M_A ersetzt.

Originalsystem:



Ersatzsystem:



Die virtuelle Verrückung von Punkt B wurde bereits bestimmt zu:

$$\delta \boldsymbol{r}_B = \frac{1}{2}\, L\, \delta\varphi\, \boldsymbol{e}_x + \frac{1}{2} L\, \delta\varphi\, \boldsymbol{e}_y$$

Bestimmen Sie die virtuelle Arbeit δW des Systems in der dargestellten Lage. (**1,5 Punkte**)

$$\delta W = -\frac{1}{2} F L \delta\varphi + M_A \delta\varphi + \frac{1}{3} q_o L^2 \delta\varphi$$

Bestimmen Sie das Moment M_A. (**1,0 Punkte**)

$$M_A = \frac{1}{2} F L - \frac{1}{3} q_0 L^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: _____

Nachname: _____

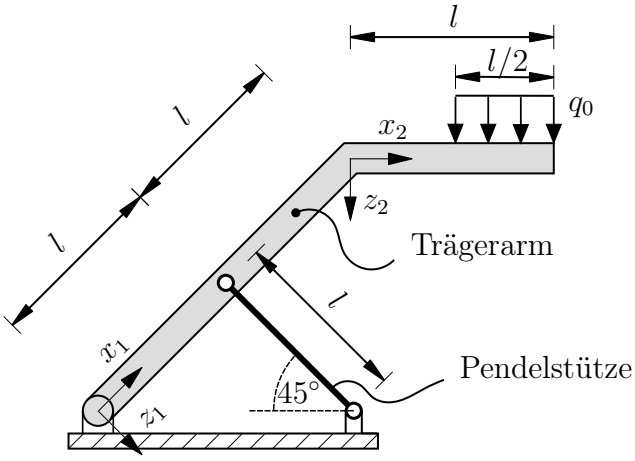
Matr.-Nr.: _____

Hinweis:
Die nachfolgende Aufgabe ist eine Freitextaufgabe. Ausschließlich für diese Aufgabe wird der gesamte Rechenweg Ihrer Lösung bewertet. Für die jeweiligen Teilaufgaben stehen Ihnen die nachfolgenden Lösungskästchen zur Verfügung. Tragen Sie alle Ihre Rechenschritte in die Kästchen ein.

Aufgabe 3

Der Trägerarm soll für die nebenstehend abgebildete Krankonstruktion ausgelegt werden. Der Kran (Eigengewicht vernachlässigbar) wird durch die Streckenlast q_0 belastet. Der Trägerarm und die Pendelstütze sind auf einer Bodenplatte befestigt und drehbar gelagert. Die Abmessungen sind der Skizze zu entnehmen. Für die Länge l und die Streckenlast q_0 seien die folgenden Werte gegeben:

$$l = 2\,\mathrm{m} \qquad q_0 = 1000\,\mathrm{N/m}$$



a)
Überführen Sie die Konstruktion in ein mechanisches Ersatzmodel unter der Verwendung der aus der Veranstaltung bekannten Tragwerkselemente und Lagertypen. Das Model soll zur Bestimmung des Querkraft- und Biegemomentverlaufs dienen. Begründen Sie den Aufbau Ihres Modells kurz. Bewerten Sie die statische Bestimmtheit des von Ihnen erstellten Ersatzmodells. (**1,5 Punkte**)

b)
Für die Konstruktion stehen Ihnen Lager zur Verfügung, die im Betrag eine maximale Last von $L_{\max} = 2000\,\mathrm{N}$ aufnehmen können. Prüfen Sie ob die Lager der gegebenen Belastung standhalten. Zeichnen Sie dazu zunächst ein Freikörperbild und bestimmen Sie alle relevanten Lagerreaktionen. (**3,5 Punkte**)

c)
Das Material und das Profil des Trägerarms sei bereits gegeben. Die gewählte Konstruktion kann im Betrag ein maximales Biegemoment $M_{\max} = 3000\,\mathrm{Nm}$ und eine maximale Querkraft von $Q_{\max} = 1500\,\mathrm{N}$ versagensfrei aufnehmen.

- Prüfen Sie für den Teilbereich $0 < x_1 < 2\,l$, ob der Trägerarm der Biegemomentbelastung standhält.
- Prüfen Sie weiter, ob der Teilbereich $0 < x_2 < l$ der Querkraftbelastung standhält.

Verwenden Sie jeweils die entsprechenden gegebenen Koordinatensysteme. (**5,0 Punkte**)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

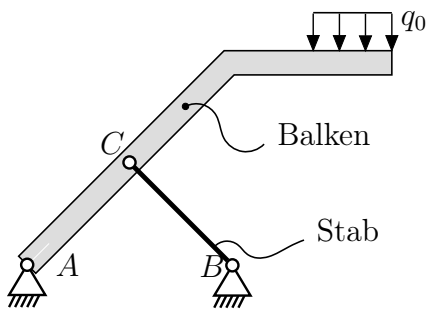
Vorname: _____

Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 3 a)

- Festlager in Punkt A und B (Wertigkeit 2)
- Gelenkige Verbindung in Punkt C (Wertigkeit 2)
- Balken für den Trägerarm zur Bestimmung der Schnittgrößen



Statische Bestimmtheit:
Anzahl der Körper $n = 2$
Anzahl der Lagerreaktionen $r = 4$
Anzahl der Verbindungsreaktionen $v = 2$
$f = 3\,n - r - v = 0 \rightarrow$ notwendige Bedingung erfüllt.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: _____

Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 3 a)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

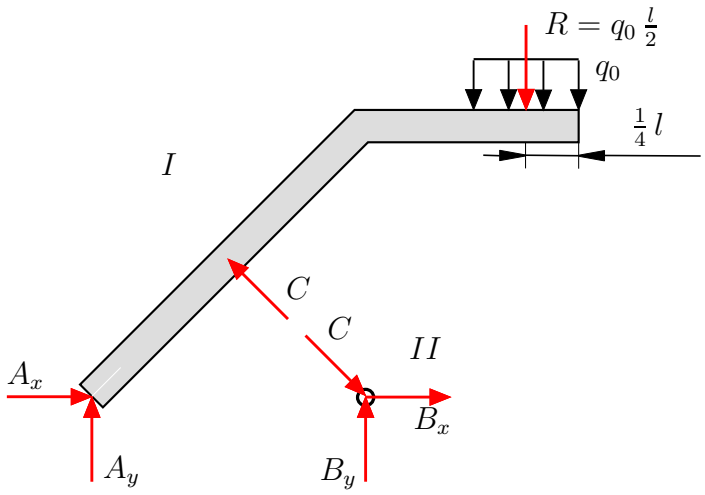
Vorname: _____

Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 3 b)

Freikörperbild:



Kräftegleichgewicht:

$$\sum M^I_{(A)} = C\,l - q_0\,\frac{l}{2}\left[\sqrt{2}\,l + \frac{3}{4}\,l\right] = 0 \qquad \Rightarrow C \approx 2164,21\,\mathrm{N}$$

$$\sum F^I_x = A_x - C\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad \Rightarrow A_x \approx 1530,33\,\mathrm{N}$$

$$\sum F^I_y = A_y + C\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{l}{2}\,q_0 = 0 \qquad \Rightarrow A_y \approx -530,33\,\mathrm{N}$$

$$\sum F^{II}_x = C\,\frac{\sqrt{2}}{2} + B_x = 0 \qquad \Rightarrow B_x \approx -1530,33\,\mathrm{N}$$

$$\sum F^{II}_y = B_y - C\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad \Rightarrow B_y \approx 1530,33\,\mathrm{N}$$

Prüfen der Lager:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \approx 1619,62\,\mathrm{N} < L_{\max}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \approx 2164,21\,\mathrm{N} > L_{\max}$$

Lager A hält der Belastung stand, Lager B nicht.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: _____

Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 3 b)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

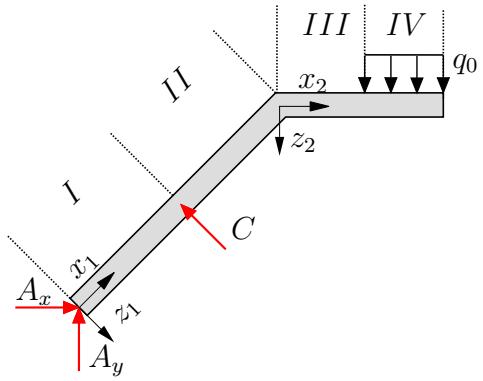
Vorname: _____

Nachname: _____

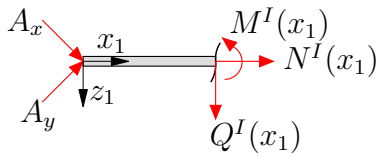
Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 3 c)

$$
\begin{aligned}
I &: \quad 0 \le x_1 \le l \\
II &: \quad l \le x_1 \le 2\,l \\
III &: \quad 0 \le x_2 \le l/2 \\
IV &: \quad l/2 \le x_2 \le l
\end{aligned}
$$

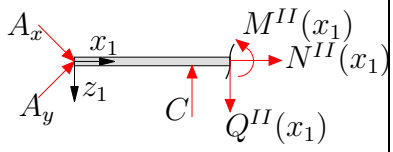


Schnitt I:



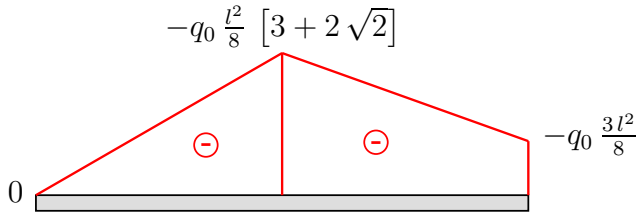
$$
\begin{aligned}
\sum M^I_{(x_1)} &= A_x \frac{\sqrt{2}}{2}\, x_1 - A_y \frac{\sqrt{2}}{2}\, x_1 + M^I(x_1) = 0 \\
M^I(x_1) &= -q_0 \frac{l}{8} \left[3 + 2\sqrt{2}\right] x_1
\end{aligned}
$$

Schnitt II:



$$
\begin{aligned}
\sum M^{II}_{(x_1)} &= A_x \frac{\sqrt{2}}{2}\, x_1 - A_y \frac{\sqrt{2}}{2}\, x_1 \\
&\quad - C\,[x_1 - l] + M^{II}(x_1) = 0 \\
M^{II}(x_1) &= q_0 \frac{l}{8} \left[3 + 4\sqrt{2}\right] [x_1 - l]
\end{aligned}
$$

Biegemomentverlauf für $0 \le x_1 \le 2\,l$:



Maximales Biegemoment $|M_{\max}| = 2914,21\,\mathrm{N\,m}$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: _____

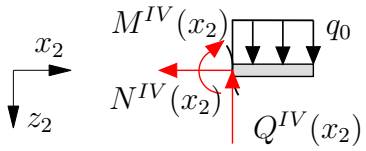
Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 3 c)

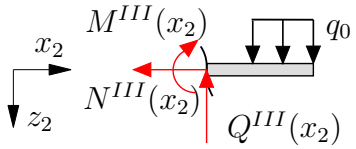
Schnitt IV:

$$\sum F^{IV}_{(x_2)} = -Q(x_2) + q_0\,[l - x_2] = 0$$
$$F^{IV}(x_2) = q_0\,[l - x_2]$$

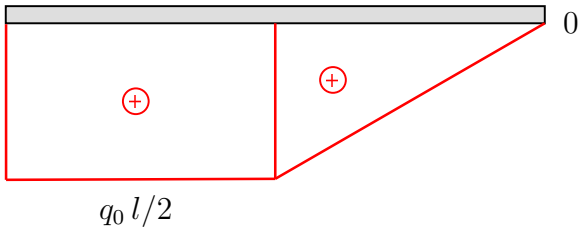


Schnitt III:

$$\sum F^{III}_{(x_2)} = -Q(x_2) + q_0\,\frac{l}{2} = 0$$
$$F^{III}(x_2) = q_0\,\frac{l}{2}$$



Querkraftverlauf für $0 \leq x_2 \leq l$:



Maximale Querkraft $|Q_{\max}| = 1000\,\mathrm{N}$

Fazit:
Der Träger hält sowohl der Biegemomentbelastung als auch der Querkraftbelastung auf den jeweilig geprüften Teilbereichen stand.