TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

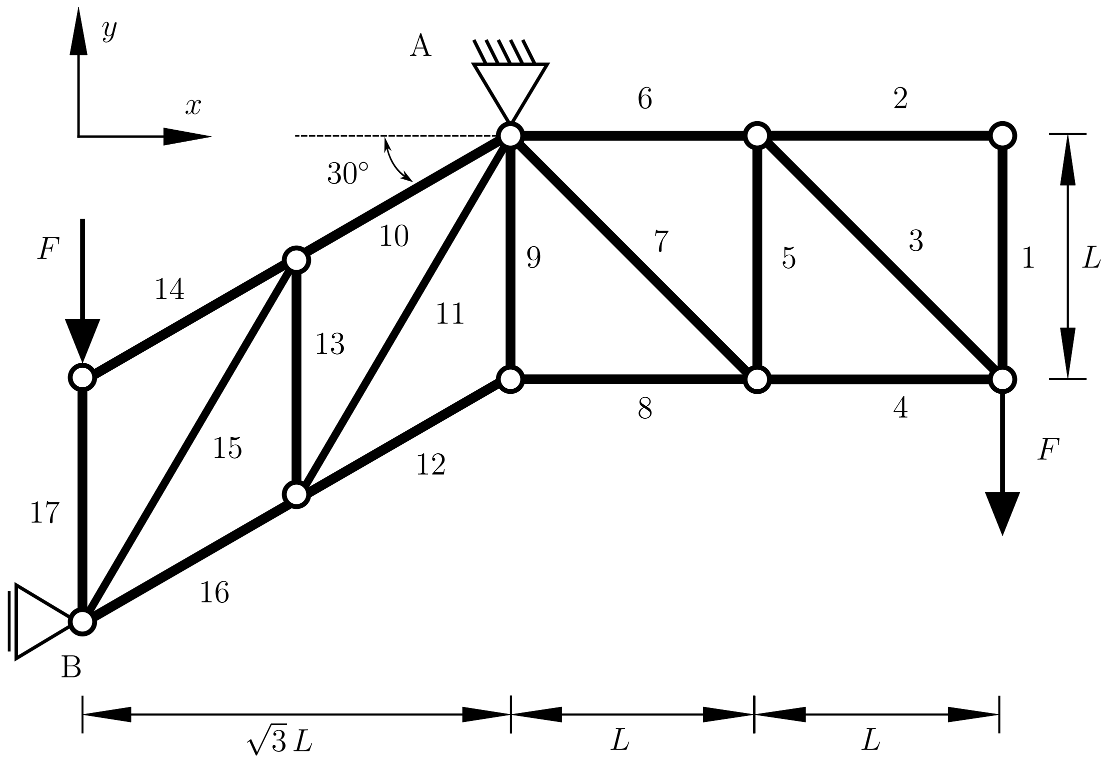
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

a)
Es soll das nachfolgende Fachwerk berechnet werden. Die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen.



Geben Sie sämtliche Nullstäbe an, welche aufgrund gängiger Kriterien direkt als solche identifiziert werden können (keine Rechnung). **(1,5 Punkte)**

1,2, 14

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

Berechnen Sie die Stabkräfte $\{S_3, S_4, S_5\}$ und S_{12}. Die Lagerreaktionen wurden dabei gemäß der positiven Koordinatenrichtungen bereits zu $A_x = \left[\sqrt{3}/2 - 1\right] F$, $A_y = 2\,F$ und $B_x = -\left[\sqrt{3}/2 - 1\right] F$ bestimmt. **(3,0 Punkte)**

$S_3 = \sqrt{2}\,F$

$S_4 = -\,F$

$S_5 = -\,F$

$S_{12} = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}\,F$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

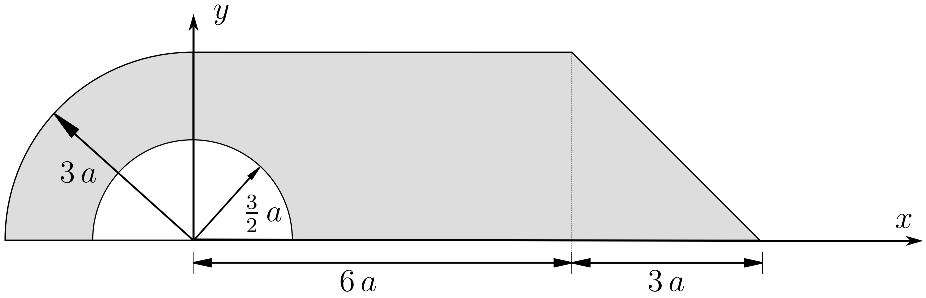
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

b)



Geben Sie den Flächeninhalt A und die Schwer-punktkoordinate x_S des Körpers bezogen auf das angegebene Koordinatensystem an. Fassen Sie die einzelnen Terme dabei **nicht** zusammen. (**2,0 Punkte**)

$$A = 18\,a^2 + \frac{9}{2}\,a^2 + \frac{\pi\;[3\,a]^2}{4} - \frac{\pi\;\left[\frac{3}{2}a\right]^2}{2}$$

$$x_S = \left[18\,a^2\,3\,a + \frac{9}{2}\,a^2\,7\,a + \frac{\pi\;[3\,a]^2}{4}\left[-\frac{12\,a}{3\,\pi}\right] - \frac{\pi\;\left[\frac{3}{2}a\right]^2}{2}0\right]/A$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

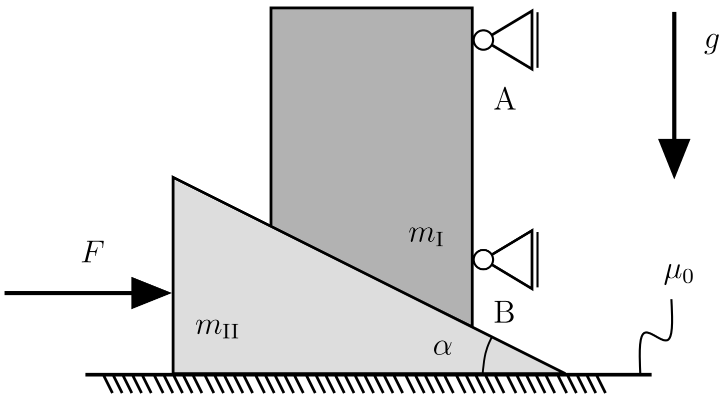
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

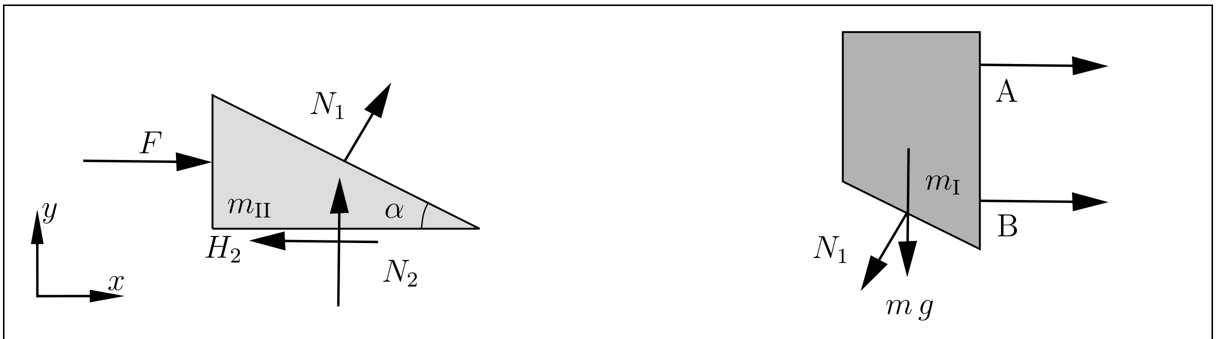
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

c)
Im dargestellten System sind zwei Blöcke in Kontakt, wobei der Block I die Masse m besitzt und der Block II masselos ist. Der Block I liegt auf Block II (der eine Keilform mit Winkel $0 < \alpha < \pi/2$ hat). Der Haftreibungskoeffizient zwischen Block II und der Ebene beträgt μ_0.



Zeichnen Sie alle Kräfte in das unten bereitgestellte Freikörperbild ein. (**1,0 Punkte**)



Bestimmen Sie die minimale Kraft F, die notwendig ist, um mithilfe des keilförmigen Blocks II den Block I anzuheben. (**2,5 Punkte**)

$$F \geq m\,g\,[\tan(\alpha) + \mu_0]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

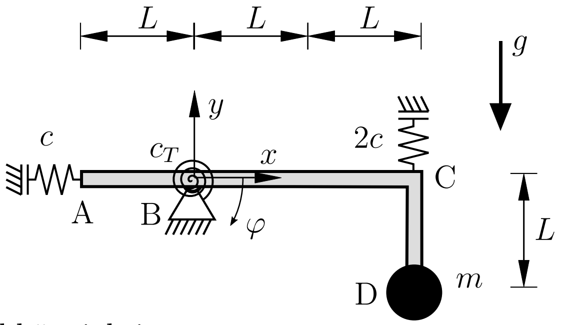
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)
Der dargestellte Rahmen ist masselos bis auf die Punktmasse im Punkt D. Alle Federn sind in der dargestellten Lage ungespannt.



Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ und $\boldsymbol{r}_{\mathrm{D}}$ in Abhängigkeit von φ.
Hinweis: Die Ergebnisse sollen **nicht** zusätzlich linearisiert werden. (**1,0 Punkte**)

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = -L\cos(\varphi)\boldsymbol{e}_x + L\sin(\varphi)\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{D}} = L\left(2\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\right)\boldsymbol{e}_x + L\left(-2\sin(\varphi) - \cos(\varphi)\right)\boldsymbol{e}_y$$

Bestimmen Sie die virtuellen Verrückungen der Punkte A und D in Abhängigkeit des Freiheitsgrades φ.
Hinweis: Die Ergebnisse sollen **nicht** zusätzlich linearisiert werden. (**1,5 Punkte**)

$$\delta\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}} = L\sin(\varphi)\delta\varphi\boldsymbol{e}_x + L\cos(\varphi)\delta\varphi\boldsymbol{e}_y$$

$$\delta\boldsymbol{r}_{\mathrm{D}} = -L\delta\varphi\left(2\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\right)\boldsymbol{e}_x + L\delta\varphi\left(-2\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\right)\boldsymbol{e}_y$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Bestimmen Sie ein Gesamtpotential $\Pi(\varphi)$ für das System. Fassen Sie die einzelnen Terme nicht weiter zusammen. **(2,0 Punkte)**

$$\Pi(\varphi) = \frac{1}{2}c\,(L - L\cos(\varphi))^2 + \frac{1}{2}c_T\varphi^2 + c\,(2L\sin(\varphi))^2 + mg\,(-2L\sin(\varphi) - L\cos(\varphi))$$

b)

Für ein nicht näher spezifiziertes System ist das folgende Potential gegeben:

$$\Pi(\varphi) = cL^2\,[\cos(\varphi) - 1]^2 + FL\,[\cos(\varphi) - 1]$$

Die Kraft wurde zu $F = cL$ bestimmt.

Bestimmen Sie alle Winkel $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, für die sich das System im Gleichgewicht befindet. Geben Sie dabei relevante Zwischenschritte an. **(1,5 Punkte)**

$$\Pi'(\varphi) = -2cL^2\sin(\varphi)\,[\cos(\varphi) - 1] - FL\sin(\varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \Pi'(\varphi) = cL^2\,[-2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \sin(\varphi)] = cL^2\sin(\varphi)\,[-2\cos(\varphi) + 1] = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi_2 = \frac{1}{3}\pi$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

Untersuchen Sie die zuvor ermittelte(n) Gleichgewichtslage(n) auf Stabilität. Geben Sie dabei relevante Zwischenschritte an. **(1,5 Punkte)**

Überprüfen von $\Pi''(\varphi) \lesseqgtr 0$

$$\Pi''(\varphi) = cL^2\left[\cos(\varphi) - 2\cos(\varphi)^2 + 2\sin(\varphi)^2\right]$$
$$\Pi''(\varphi_1) = cL^2\left[1 - 2\cdot 1^2 + 2\cdot 0\right] = -cL^2 < 0 \Rightarrow \varphi_1 \text{ ist ein instabiler Zustand!}$$
$$\Pi''(\varphi_2) = cL^2\left[\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{3}{4}\right] = \frac{3}{2}cL^2 > 0 \Rightarrow \varphi_2 \text{ ist ein stabiler Zustand!}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

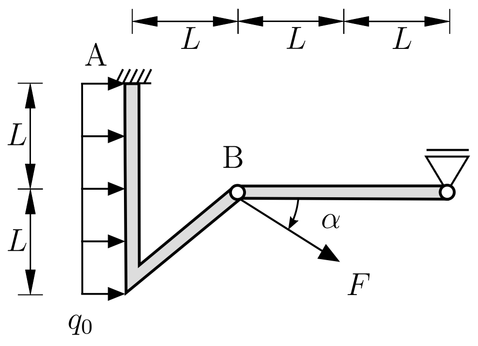
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

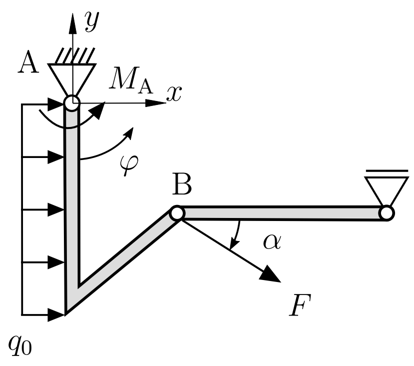
c)

Gemäß dem Prinzip der virtuellen Arbeit wurde das statisch bestimmte Originalsystem (links) durch ein kinematisches Ersatzsystem (rechts) ersetzt.

Originalsystem:



Ersatzsystem:



Die virtuelle Verrückung von Punkt B wurde bereits bestimmt zu:

$$\delta \boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = L\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_x + L\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_y$$

Bestimmen Sie die virtuelle Arbeit δW des Systems in der dargestellten Lage in Abhängigkeit von $\delta\varphi$. **(1,5 Punkte)**

$$\boxed{\delta W = \delta\varphi F L\,[\cos(\alpha) - \sin(\alpha)] + M_{\mathrm{A}}\delta\varphi + 2q_0L^2\delta\varphi}$$

Bestimmen Sie das Moment M_{A}. **(1,0 Punkte)**

$$\boxed{M_{\mathrm{A}} = -2q_0L^2 + FL\,[\sin(\alpha) - \cos(\alpha)]}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

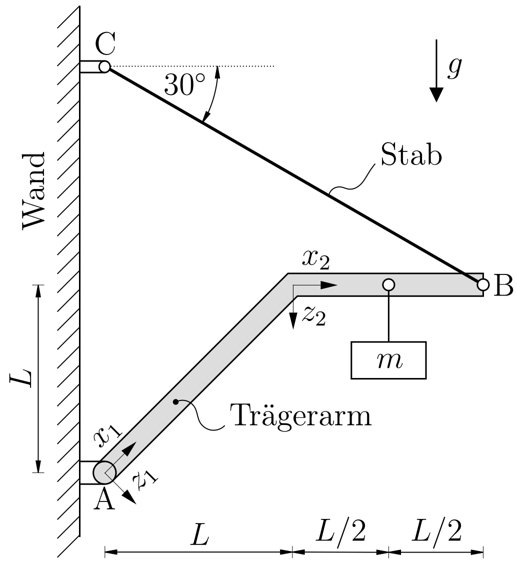
Matr.-Nr.: ____________________

Hinweis:
Die nachfolgende Aufgabe ist eine Freitextaufgabe. Ausschließlich für diese Aufgabe wird der gesamte Rechenweg Ihrer Lösung bewertet. Für die jeweiligen Teilaufgaben stehen Ihnen die nachfolgenden Lösungskästchen zur Verfügung. Tragen Sie alle Rechenschritte in die Kästchen ein.

Aufgabe 3 (Seite 1 von 7)

Die abgebildete Tragkonstruktion (Eigengewicht vernachlässigbar) soll ausgelegt werden für:

$$L = 2\,\mathrm{m},$$
$$m = 1000\,\mathrm{kg},$$
$$g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$$



a)
Überführen Sie die Konstruktion in ein **mechanisches Ersatzmodell** unter der Verwendung der aus der Veranstaltung bekannten Tragwerkselemente und Lagertypen. Das Modell soll zur Bestimmung des Querkraft- und Biegemomentverlaufs dienen. Begründen Sie den Aufbau Ihres Modells kurz. Prüfen Sie die **statische Bestimmtheit** des Ersatzmodells. (**1,5 Punkte**)

b)
Für die Konstruktion stehen Ihnen Lager zur Verfügung, die **im Betrag** eine maximale Last von $F_{\mathrm{max}} = 8000\,\mathrm{N}$ aufnehmen können. Prüfen Sie, ob die Lager in den Punkten A und C der gegebenen Belastung standhalten. Zeichnen Sie dazu zunächst ein **Freikörperbild** und bestimmen Sie alle relevanten **Lagerreaktionen**. (**3,5 Punkte**)

c)
Die gewählte Konstruktion kann im Betrag eine maximale Querkraft $Q_{\mathrm{max}} = 1500\,\mathrm{N}$ und ein maximales Biegemoment von $M_{\mathrm{max}} = 6000\,\mathrm{Nm}$ versagensfrei aufnehmen.

- Prüfen Sie für den Bereich $0 < x_1 < \sqrt{2}\,L$, ob der Träger der **Querkraftbelastung** standhält.
- Prüfen Sie für den Bereich $0 < x_2 < L$, ob der Träger der **Biegemomentbelastung** standhält.

(**5,0 Punkte**)

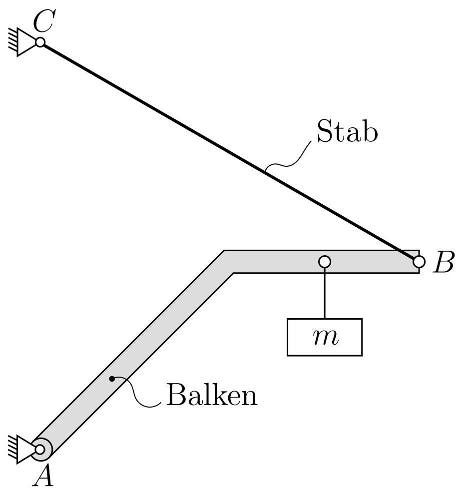
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 7)

- Festlager in Punkt A und C (Wertigkeit 2)
- Gelenkige Verbindung in Punkt B (Wertigkeit 2)
- Balken für den Trägerarm zur Bestimmung der Schnittgrößen



Statische Bestimmtheit:
Anzahl der Körper $n = 2$
Anzahl der Lagerreaktionen $r = 4$
Anzahl der Verbindungsreaktionen $v = 2$
$f = 3\,n - r - v = 0 \rightarrow$ notwendige Bedingung erfüllt.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

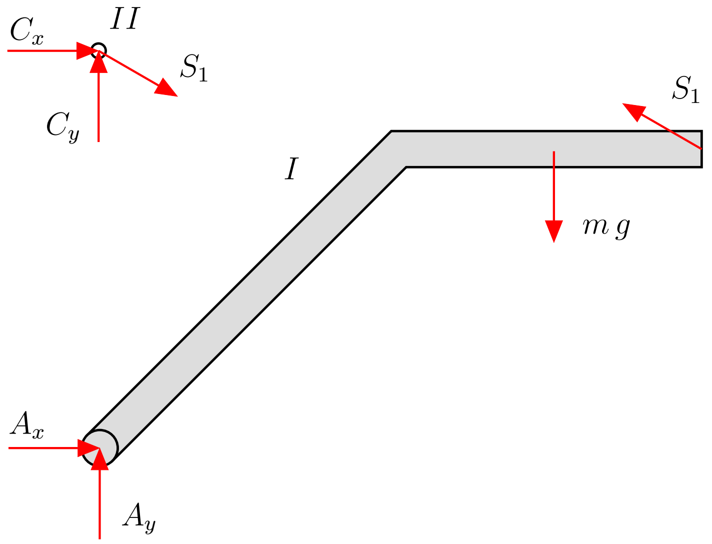
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 7)

Freikörperbild:



Kräftegleichgewicht:

$$\sum M^I_{(A)} = m\,g\,\frac{3}{2}\,l - S_1\left[\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right]\,l \qquad \Rightarrow S_1 \approx 7885,75\,\mathrm{N}$$

$$\sum F^I_x = A_x - S_1\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad \Rightarrow A_x \approx 6829,26\,\mathrm{N}$$

$$\sum F^I_y = A_y + m\,g\left[\frac{3}{2\,\left[\sqrt{3}+2\right]} - 1\right] = 0 \qquad \Rightarrow A_y \approx 5867,13\,\mathrm{N}$$

$$\sum F^{II}_x = C_x + S_1\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad \Rightarrow C_x \approx -6829,26\,\mathrm{N}$$

$$\sum F^{II}_y = C_y - S_1\,\frac{1}{2} = 0 \qquad \Rightarrow C_y \approx 3942,87\,\mathrm{N}$$

Prüfen der Lager:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \approx 9003,44\,\mathrm{N} < L_{\max}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \approx 7885,75\,\mathrm{N} > L_{\max}$$

Lager C hält der Belastung stand, Lager A nicht.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

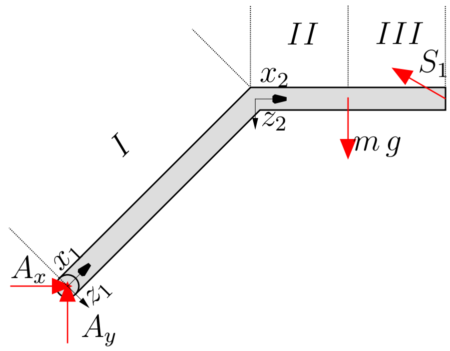
Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

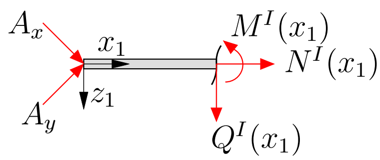
Matr.-Nr.: ______________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 7)

$$
\begin{array}{lll}
I & : & 0 \le x_1 \le \sqrt{2}\, l \\
II & : & 0 \le x_2 \le l/2 \\
III & : & l/2 \le x_2 \le l
\end{array}
$$



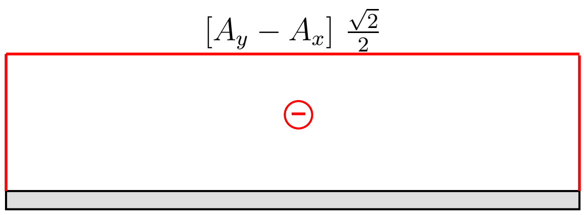
Schnitt I:



$$\sum F^I_{(z_1)} = A_x \frac{\sqrt{2}}{2} - A_y \frac{\sqrt{2}}{2} + Q^I(x_1) = 0$$

$$Q^I(x_1) = [A_y - A_x]\, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Querkraftverlauf für $0 \le x_2 \le l$:



Maximale Querkraft $|Q_{\max}| = 680{,}33\,\mathrm{N}$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

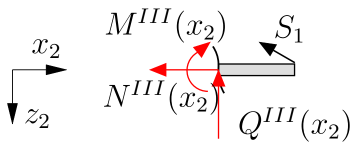
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 5 von 7)
Schnitt III:

$$\sum M^{III}_{(x_2)} = \frac{1}{2} S_1 \, [l - x_2] - M^{III}(x_2) = 0$$

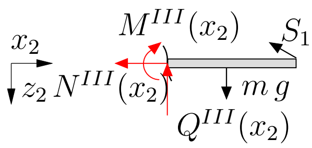
$$M^{II}(x_1) = \frac{3\,m\,g}{2\,[\sqrt{3}+2]}\,[l - x_2]$$



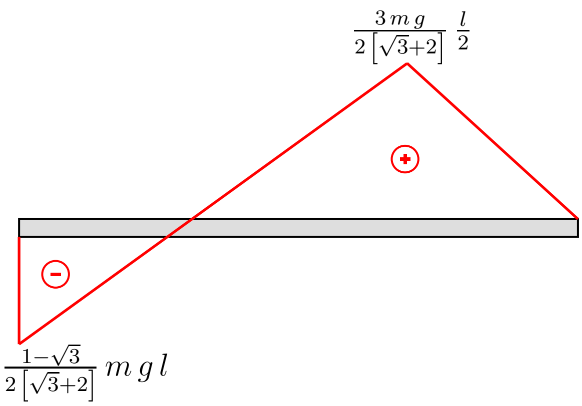
Schnitt II:

$$\sum M^{II}_{(x_2)} = \frac{1}{2} S_1 \, [l - x_2] - m\,g \left[\frac{l}{2} - x_2\right] - M^{II}(x_2) = 0$$

$$M^{II}(x_1) = \frac{3\,m\,g}{2\,[\sqrt{3}+2]}\,[l - x_2] - m\,g\left[\frac{l}{2} - x_2\right]$$



Biegemomentverlauf für $0 \leq x_1 \leq 2\,l$:



Maximales Biegemoment $|M_{\max}| = 3942{,}8\,\mathrm{N\,m}$

Fazit:
Der Träger hält sowohl der Biegemomentbelastung als auch der Querkraftbelastung auf den jeweilig geprüften Teilbereichen stand.

Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Aufgabe 3 (Seite 6 von 7)

TU Dortmund
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 7 von 7)