TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

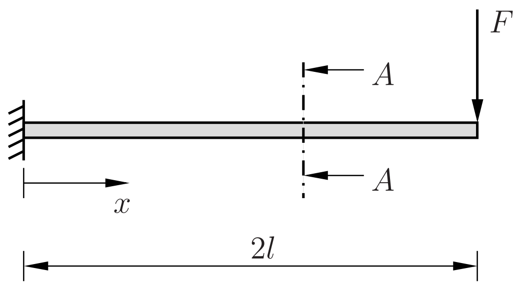
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

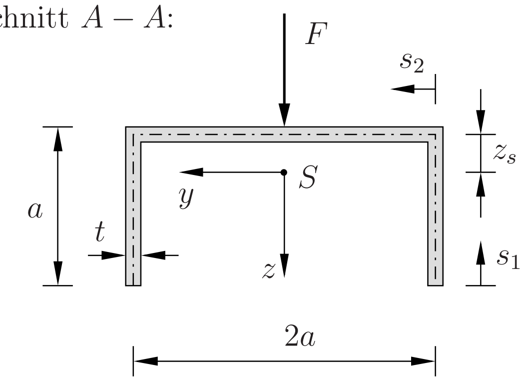
Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)

Ein als masselos anzusehender Balken, bestehend aus einem dünnwandigen U-Profil ($t \ll a$), ist an der linken Seite eingespannt und wird an seinem rechten Ende durch eine Kraft F, deren Wirkungslinie durch die Symmetrieachse verläuft, belastet. Die Abmessungen des Querschnitts sind der Abbildung zu entnehmen.



Schnitt $A - A$:



Das Flächenträgheitsmoment $I_y = \dfrac{5}{12}a^3 t$ und die Länge $z_s = \dfrac{a}{4}$ sind für dieses System bereits berechnet.

Bestimmen Sie das statische Moment $S_y(s_1)$ bezüglich der Koordinate s_1 für den Teilbereich $0 \leq s_1 \leq a$. **(1,0 Punkte)**

$$S_y(s_1) = \frac{3}{4}a\,s_1\,t - \frac{1}{2}s_1^2\,t$$

Bestimmen Sie das statische Moment $S_y(s_2)$ bezüglich der Koordinate s_2 für den Teilbereich $0 \leq s_2 \leq 2a$. **(1,0 Punkte)**

$$S_y(s_2) = \frac{1}{4}a^2\,t - \frac{a}{4}s_2\,t$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

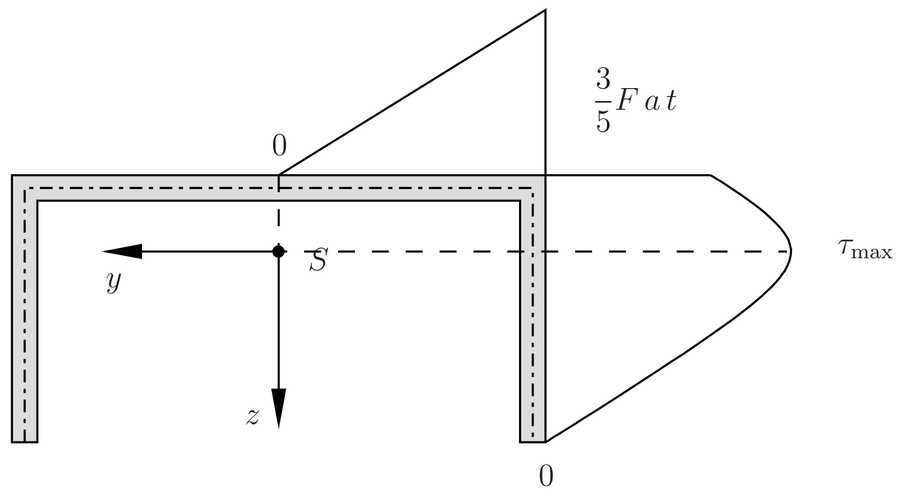
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf der Schubspannung für den rechten Teil des Querschnitts ($0 \leq s_1 \leq a$ und $0 \leq s_2 \leq a$). Tragen Sie dabei die betragsmäßigen Werte für die Schubspannungen an den Stellen $s_1 = 0$, $s_1 = a$ und $s_2 = a$ in Abhängigkeit von F, a und t ein. Kennzeichnen Sie außerdem die Stelle, an der die maximale Schubspannung auftritt. **(3,0 Punkte)**



Bestimmen Sie den Wert der maximalen Schubspannung $\tau_{\max}(F, a, t)$ im Querschnitt. **(1,0 Punkte)**

$$\tau_{\max} = \tau\left(s_1 = \frac{3}{4}a\right) = \frac{27}{40}\frac{F}{a\,t}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

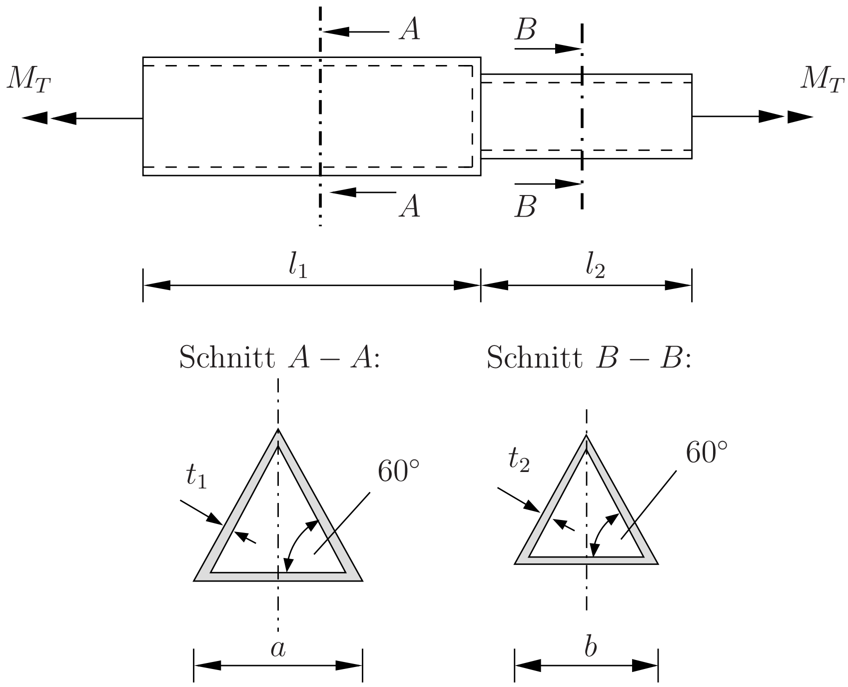
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

b)

Eine aus zwei dünnwandigen Dreikantwellen zusammengesetzte Welle wird an den Enden durch die entgegengesetzt wirkenden Momente $M_T = 1,2 \times 10^5$ Ncm belastet.



Bestimmen Sie den Wert der Schubspannungen in den Schnitten $A-A$ und $B-B$. Nutzen Sie dabei folgende Werte und runden Sie auf zwei Nachkommastellen. **(2,0 Punkte)**

$l_1 = 80$ cm, $l_2 = 50$ cm, $t_1 = 0,1$ cm, $t_2 = 0,2$ cm,
$a = 8$ cm, $b = 7$ cm, $G = 8 \times 10^6$ N/cm ^{2}

1. Bredtsche Formel: $\tau = \dfrac{M_\mathrm{T}}{2\,A_\mathrm{m}\,t}$	
$\tau_1 = 21652,83$ N/cm^3	$\tau_2 = 14137,61$ N/cm^3

Berechnen Sie die Verdrehwinkel der beiden Wellenenden relativ zur Übergangsstelle zwischen den Wellen. **(2,0 Punkte)**

$\vartheta_1 = 0,09376 \approx 5,37°$	$\vartheta_2 = 0,04372 \approx 2,51°$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

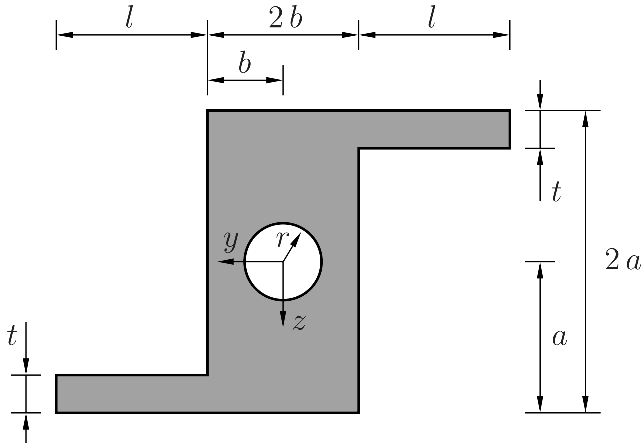
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

a)
Gegeben ist das **nicht** als dünnwandig anzusehende, dargestellte Profil mit Abmessungen a, b, l, t und einer kreisförmigen Bohrung mit Radius r.

Bestimmen Sie die Flächenträgheitsmomente I_y und I_{yz} bezüglich des gegebenen Schwerpunktskoordinatensystems. Fassen Sie die einzelnen Terme **nicht** zusammen.

(3,0 Punkte)



$$I_y = 2\left[\frac{l\,t^3}{12} + lt\left[a - \frac{t}{2}\right]^2\right] + \frac{2\,b\,[2\,a]^3}{12} - \frac{\pi\,r^4}{4}$$
$$= \frac{1}{6}\,l\,t^3 + 2\,l\,t\,\left[a - \frac{t}{2}\right]^2 + \frac{4}{3}\,b\,a^3 - \frac{\pi}{4}r^4$$

$$I_{yz} = -2\,l\,t\left[b + \frac{l}{2}\right]\left[a - \frac{t}{2}\right]$$

b)
Für nicht näher spezifizierte Verhältnisse zwischen den Längen a, b, l, t und r des in Aufgabe (a) gegebenen Querschnitts wurde das Flächenträgheitsmoment um die z-Achse zu $I_z = -6\,l^4$ berechnet. Ist dieser Wert physikalisch plausibel? Geben Sie eine eindeutige Begründung an. **(1,0 Punkte)**
Hinweis: Das nachfolgende Kästchen wird mit 0 Punkten gewertet, sollte keine Begründung für die getroffene Aussage erfolgen.

Nicht plausibel da $I_z > 0$ gelten muss

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

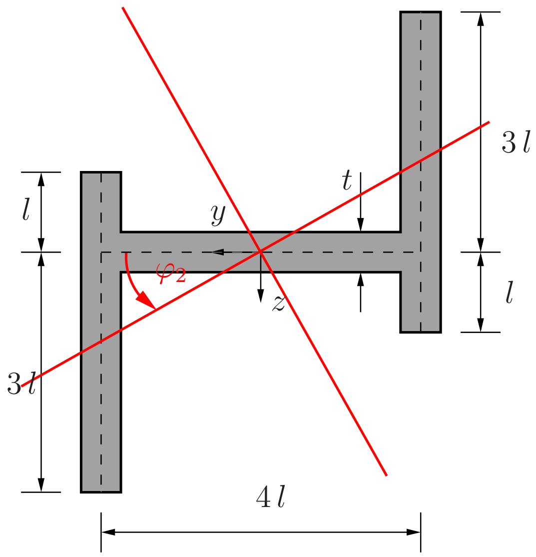
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

c)
Für das dargestellte dünnwandige Profil einheitlicher Wandstärke $t \ll l$ wurden die Flächenträgheitsmomente bezüglich des eingezeichneten Schwerpunktskoordinatensystems zu

$$I_y = \frac{56}{3}\, l^3\, t$$
$$I_z = \frac{112}{3}\, l^3\, t$$
$$I_{yz} = -16\, l^3\, t$$

bestimmt.



Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente I_1 und I_2 (mit $I_1 > I_2$) sowie den zugehörigen Winkel φ_1 bzw. φ_2, den die y-Achse mit der jeweiligen Hauptrichtung einschließt. Geben Sie die Ergebnisse als Dezimalzahl mit zwei Nachkommastellen an. **(2,5 Punkte)**

$I_1 = 46.5232\, l^3\, t$ $\qquad$ $I_2 = 9.4767\, l^3\, t$

$\varphi_1 = -60.13°$ $\qquad$ $\varphi_2 = 29.87°$

Zeichnen Sie die Hauptachsen maßstäblich in den **oben** dargestellten Profilquerschnitt ein und markieren Sie den Winkel φ_2. **(0,5 Punkte)**

d)
Der in Aufgabe (c) gegebene Querschnitt sei nun durch die Biegemomente M_y und M_z um die entsprechende Koordinatenachse belastet. Ferner gelte $M_z/M_y = -6/7$ mit $M_y > 0$.

Zeichnen Sie die neutrale Faser maßstäblich in den **auf der nächsten Seite** abgebildeten Querschnitt ein und kennzeichnen Sie diese mit 'NF'. **(1,0 Punkte)**
Skizzieren Sie zudem qualitativ den Verlauf der Normalspannung für das gesamte Profil. Machen Sie kenntlich ob der entsprechende Abschnitt des Querschnitts auf Zug (+) oder Druck (-) belastet ist. **(1,5 Punkte)**

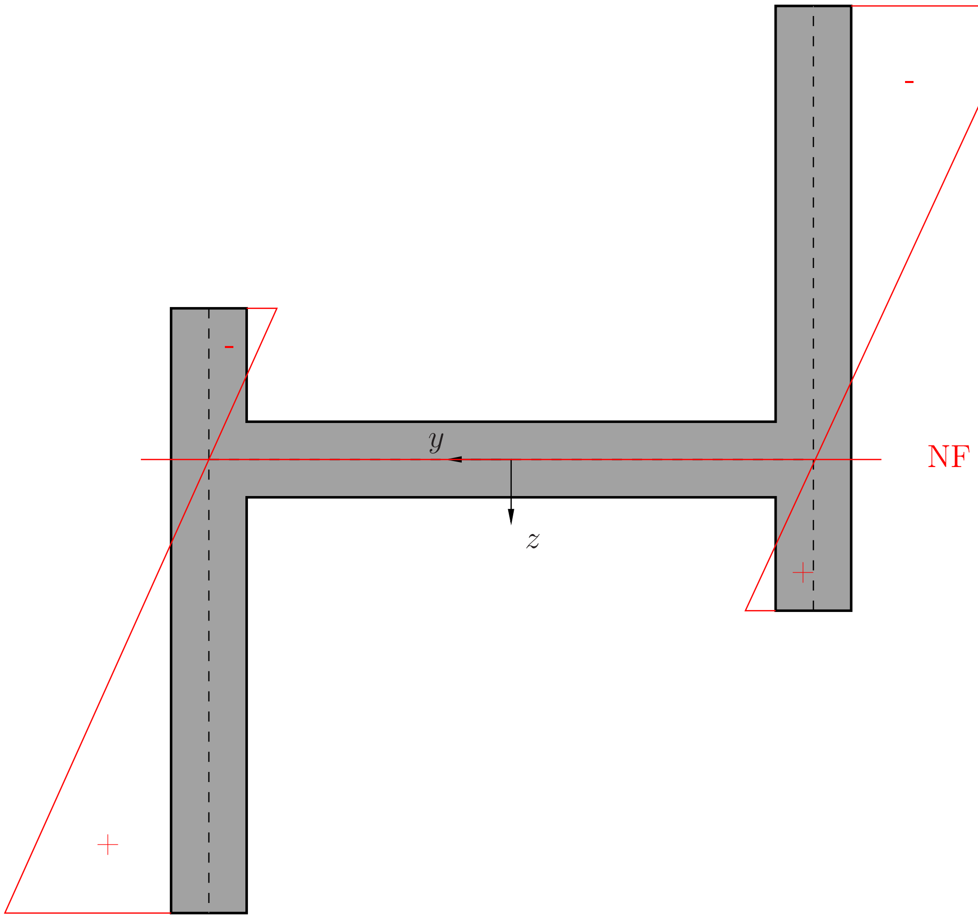
TU Dortmund
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)



An welchem Punkt P des Querschnitts liegt die maximale Zugspannung vor?
(0,5 Punkte)

$y_P = 2\,l$ $z_P = 3\,l$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

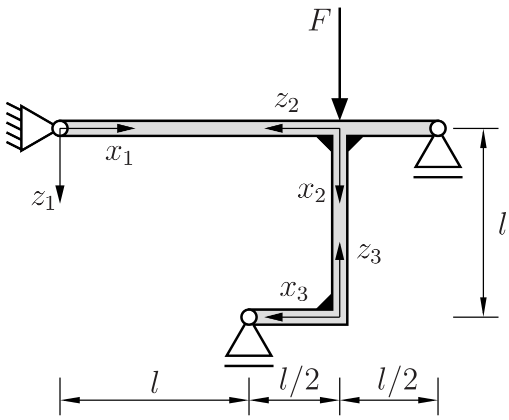
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

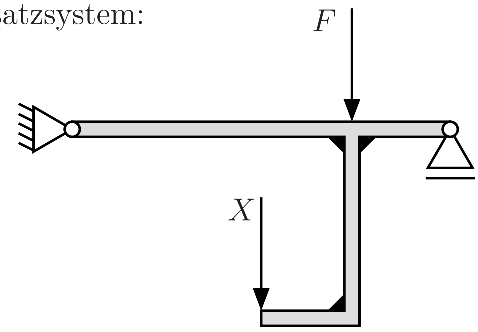
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

Der auf der linken Seite dargestellte Rahmen (Biegesteifigkeit EI) besteht aus einem Teilstück der Länge $2\,l$, einem Teilstück der Länge l sowie einem Teilstück der Länge $l/2$. Die Verbindungsstellen sind als biegestarr anzunehmen. An der eingezeichneten Position des oberen Teilstücks greift eine Einzellast F an. Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit der statisch überzähligen Kraft X dargestellt. Anteile aus Normal- und Schubverformung sind hier generell zu vernachlässigen.

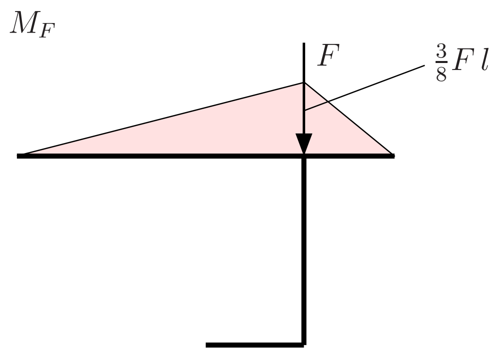


Ersatzsystem:



a)

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf des statisch bestimmten Ersatzsystems in Abhängigkeit von F und für $X = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. **(1,5 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

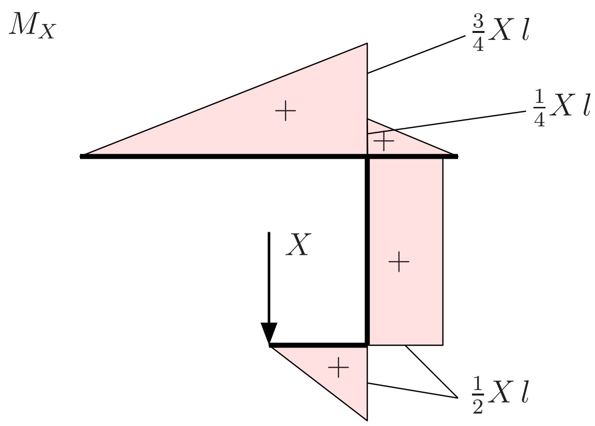
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf des statisch bestimmten Ersatzsystems in Abhängigkeit von X und für $F = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. **(2,5 Punkte)**



Geben Sie die im System gespeicherte Gesamtenergie Π als Summe einzelner (nicht zu vernachlässigender) Integrale an. Geben Sie dabei die konkreten Integrationsgrenzen an und verwenden Sie die allgemeinen Ausdrücke $M_F(x_i)$ sowie $M_X(x_i)$ für die Schnittgrößenfunktionen. Die tatsächlichen Funktionen der Schnittgrößen sollen hier **nicht** eingesetzt werden. **(2,0 Punkte)**

$$\Pi = \frac{1}{2} \int \frac{M_{\text{ges}}^2}{EI} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\,EI} \left[\int_0^{3/2\,l} [\, M_F(x_1) + M_X(x_1)\,]^2 \, \mathrm{d}x_1 + \int_{3/2\,l}^{2\,l} [\, M_F(x_1) + M_X(x_1)\,]^2 \, \mathrm{d}x_1 \right.$$

$$\left. + \int_0^{l} M_X^2(x_2)\, \mathrm{d}x_2 + \int_0^{l/2} M_X^2(x_3)\, \mathrm{d}x_3 \right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

b)

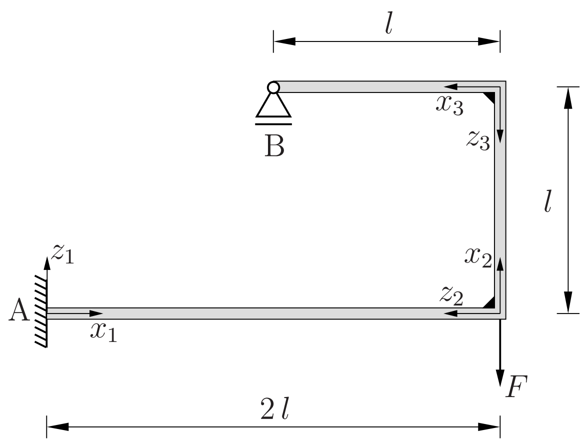
Für das rechts dargestellte statisch unbestimmte und durch eine Einzelkraft F belastete System wurde die Auflagerreaktion in Punkt B als statisch überzählige Kraft X gewählt. Die Funktionen der Biegemomentenverläufe sind wie folgt vorgegeben:

- in Abhängigkeit von F für $X = 0$:

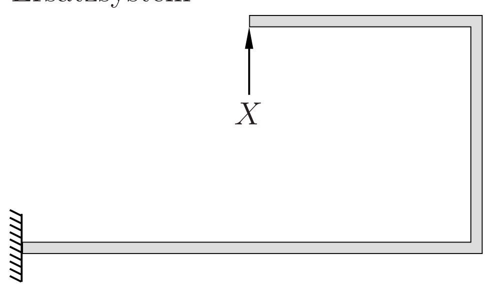
$$\begin{aligned} M_y^F(x_1) &= F\,[2\,l - x_1] \\ M_y^F(x_2) &= 0 \\ M_y^F(x_3) &= 0 \end{aligned}$$

- in Abhängigkeit von X für $F = 0$:

$$\begin{aligned} M_y^X(x_1) &= X\,[x_1 - l] \\ M_y^X(x_2) &= X\,l \\ M_y^X(x_3) &= X\,[l - x_3] \end{aligned}$$



Ersatzsystem



Berechnen Sie die statisch überzählige Kraft X. Tragen Sie dazu die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis in das Kästchen auf der nachfolgenden Seite ein. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. **(4,0 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

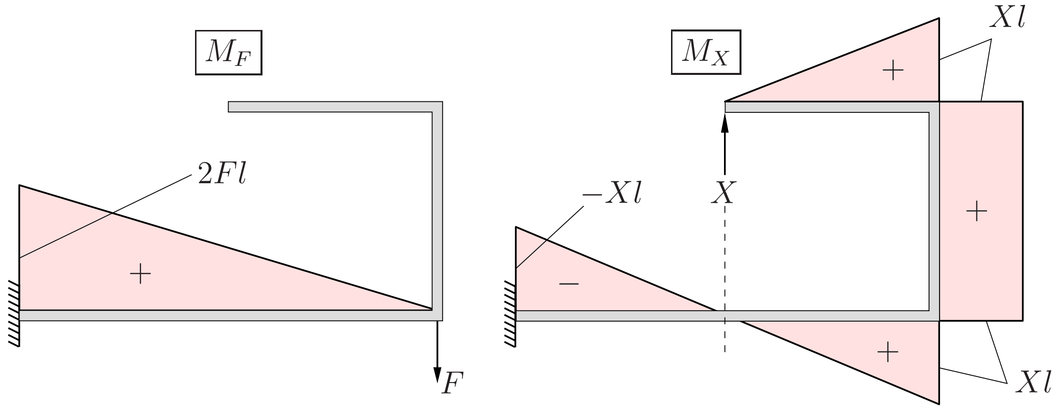
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

Graphische Darstellung der gegebenen Momentenverläufe:



Die unbestimmte Kraft X lässt sich bei konstanter Biegesteifigkeit EI des Rahmens über folgenden Ansatz für die Verschiebung w_X an der Angriffstelle von X bestimmen:

$$w_X = 0 = \frac{\partial \Pi}{\partial X} = \frac{1}{EI}\int M_{\text{ges}}\,\overline{M}\,\mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad \overline{M} = \frac{\partial M_{\text{ges}}}{\partial X} \quad \text{und} \quad M_{\text{ges}} = M_F + M_X.$$

Damit folgt

$$0 = \frac{1}{EI}\left[\underbrace{\underbrace{-\frac{1}{2}Fl^3 - \frac{1}{3}Fl^3}_{0\le x_1\le l} + \underbrace{\frac{1}{6}Fl^3}_{l\le x_1\le 2l}}_{\int M_F\,\overline{M}_X\,\mathrm{d}x_1 = \alpha_{10}} + \underbrace{\underbrace{\frac{2}{3}Xl^3}_{x_1} + \underbrace{Xl^3}_{x_2} + \underbrace{\frac{1}{3}Xl^3}_{x_3}}_{\int M_X\,\overline{M}_X\,\mathrm{d}x_i = X\int \overline{M}_X^2\,\mathrm{d}x_i = X\,\alpha_{11}}\right]$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2Xl^3 - \frac{2}{3}Fl^3 = X\,\alpha_{11} + \alpha_{10},$$

und die statisch überzählige Kraft X ergibt sich somit zu

$$X = -\frac{-\frac{2}{3}Fl^3}{2\,l^3} = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{1}{3}F.$$