Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

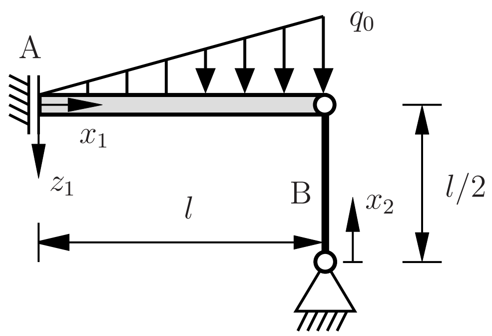
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

a)

Der nebenstehende Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI) ist durch eine Parallelführung und eine Pendelstütze gelagert. Die Pendelstütze sei dehnstarr ($EA \to \infty$). Auf den Balken wirkt eine lineare Streckenlast von $q(x_1) = q_0 \, \frac{x_1}{l}$.



Die in positive x_1-z_1-Koordinatenrichtung angenommenen Lagerreaktionen in Punkt A wurden bereits zu $A_{x_1} = 0$ und $M_A = -\frac{1}{6}\, q_0 \, l^2$ bestimmt. Die Druckkraft der Pendelstütze B ist $B = \frac{1}{2}\, q_0 \, l$. Bestimmen Sie den Biegemomentenverlauf $M(x_1)$ des Balkens bezüglich des vorgegebenen lokalen Koordinatensystems. **(1,5 Punkte)**

$$M(x_1) = -\frac{1}{6}\, q_0 \, \frac{x_1^3}{l} + \frac{1}{6}\, q_0 \, l^2$$

Berechnen Sie die Funktion der Biegelinie des Balkens $w(x_1)$. Geben Sie dabei auch die wichtigsten Zwischenschritte an. **(2,0 Punkte)**

DGL der Biegelinie

$$EI\, w''(x_1) = -M(x_1)$$

$$EI\, w'(x_1) = \frac{1}{24}\, q_0 \, \frac{x_1^4}{l} - \frac{1}{6}\, q_0 \, l^2 \, x_1 + C_1$$

$$EI\, w(x_1) = \frac{1}{120}\, q_0 \, \frac{x_1^5}{l} - \frac{1}{12}\, q_0 \, l^2 \, x_1^2 + C_1 \, x_1 + C_2$$

Rand- und Übergangsbedingungen

$$w'(x_1 = 0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

$$w\,(x_1 = l) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = \frac{3}{40}\, q_0 \, l^4$$

$$\Rightarrow EI\, w(x_1) = \frac{1}{120}\, q_0 \, \frac{x_1^5}{l} - \frac{1}{12}\, q_0 \, l^2 \, x_1^2 + \frac{3}{40}\, q_0 \, l^4$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

Nun wird die dehnsteife Pendelstütze durch einen biegestarren Stab mit einer endlichen und konstanten Dehnsteifigkeit EA ersetzt. Die Ausdehnung $u(x_2)$ des Stabes sei bekannt. Wie ändern sich dann die kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen zur Bestimmung der Biegelinie des Balkens? **(0,5 Punkte)**

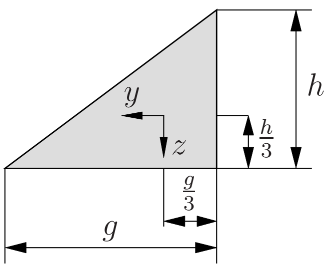
$$w(x_1 = l) = -\,u(x_2 = \tfrac{l}{2})$$

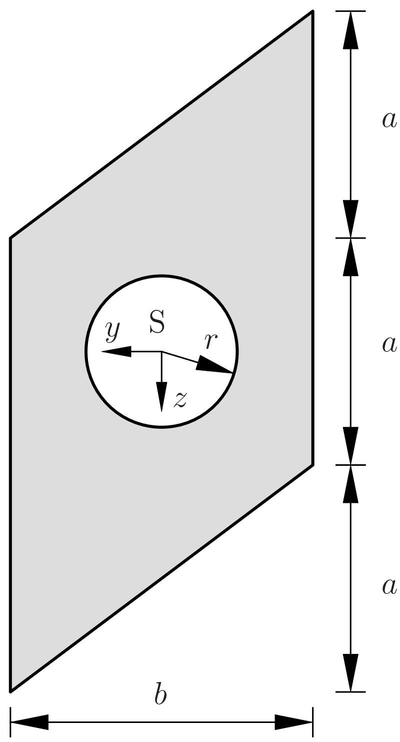
b)

Gegeben ist die vereinfachte Geometrie einer Wendeschneidplatte mit den Abmessungen a und b. Im Schwerpunkt S befindet sich eine Bohrung mit dem Radius r.

Hinweis: Die Flächenträgheitsmomente für ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten g und h und der y-Achse parallel zur Grundseite g sind:

$$I_y = \frac{g\,h^3}{36}\,, \qquad I_z = \frac{h\,g^3}{36}\,, \qquad I_{yz} = -\frac{g^2\,h^2}{72}\,.$$





Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment I_z der Wendeschneidplatte bezüglich des gegebenen y-z-Schwerpunktkoordinatensystems. Fassen Sie die einzelnen Terme **nicht** zusammen. **(1,5 Punkte)**

$$I_z = \frac{a\,b^3}{12} - \frac{\pi\,r^4}{4} + 2\cdot\left[\frac{a\,b^3}{36} + \left(\frac{1}{2}\,b - \frac{1}{3}\,b\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\,a\,b\right)\right] = \frac{1}{4}\,a\,b^3 - \frac{\pi\,r^4}{4}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

Bestimmen Sie das Deviationsmoment I_{yz} der Wendeschneidplatte bezüglich des gegebenen y-z-Schwerpunktkoordinatensystems. Fassen Sie die einzelnen Terme **nicht** zusammen. **(1,0 Punkte)**

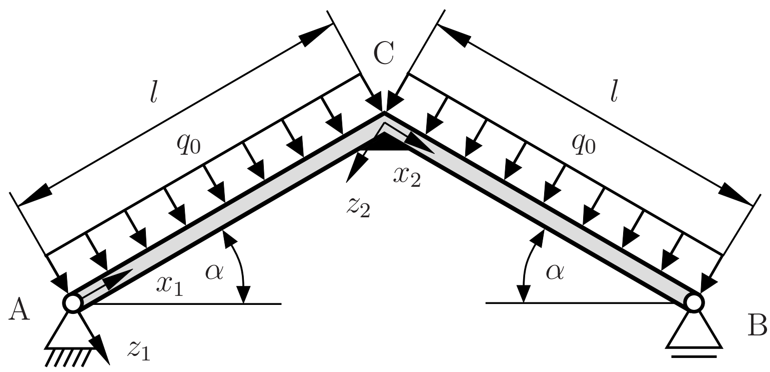
$$I_{yz} = -2 \cdot \left[\frac{a^2\, b^2}{72} + \left(\frac{1}{6}\, b\right) \left(\frac{5}{6}\, a\right) \left(\frac{1}{2}\, a\, b\right) \right] = -\,\frac{1}{6}\, a^2\, b^2$$

Wie kann die Geometrie verändert werden, sodass das Deviationsmoment I_{yz} bezüglich des gegebenen y-z-Schwerpunktkoordinatensystems verschwindet? Nennen sie **eine** beliebige Möglichkeit. **(0,5 Punkte)**

Aus den Dreiecken Rechtecke machen, die Dreiecke entfernen, eines der Dreiecke an das andere setzen (Schnittlinie = Hypotenuse), ...

c)

Das dargestellte Dach mit den Schenkellängen l wird durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Die Balken seien dehnstarr und um den Winkel α ausgelenkt. Sie sind in den Punkten A und B gelagert und im Punkt C fest miteinander verbunden.



Geben Sie alle **kinematischen** Rand- und Übergangsbedingungen an, die zur Bestimmung der Biegelinien $w_i(x_i)$ erforderlich sind. **(2,0 Punkte)**

$$w_1(x_1 = 0) = 0$$
$$w_2(x_2 = l) = 0$$
$$w_1(x_1 = l) = w_2(x_2 = 0)$$
$$w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0) \quad \text{alternativ:} \quad w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0) = 0$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

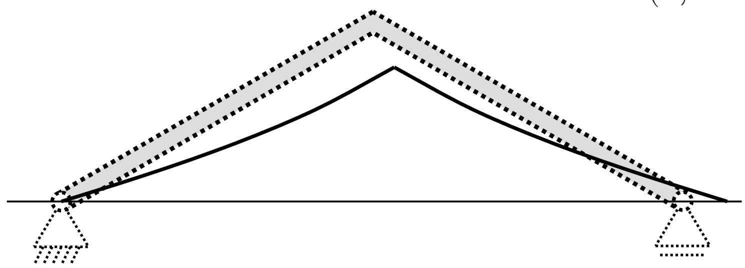
Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

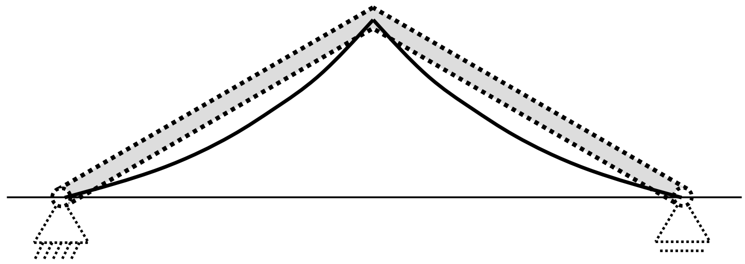
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Wie sehen die Biegelinien $w_i(x_i)$ qualitativ aus? Wählen Sie **eine** der folgenden drei Optionen aus. (**0,5 Punkte**)

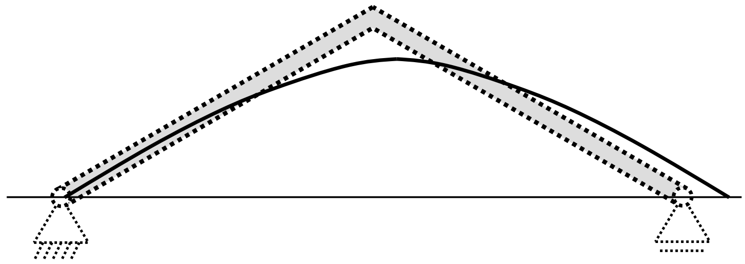
Option I:



Option II:



Option III:



Option I

Die Biegelinien $w_1(x_1)$ und $w_2(x_2)$ seien bestimmt worden und werden als bekannt vorausgesetzt. Wie groß ist dann die **vertikale** Verschiebung Δz_C in der Mitte des Daches in Punkt C? (**0,5 Punkte**)

$$\begin{aligned} \Delta z_C &= w_1(x_1 = l)\cos(\alpha) \\ &= w_2(x_2 = 0)\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

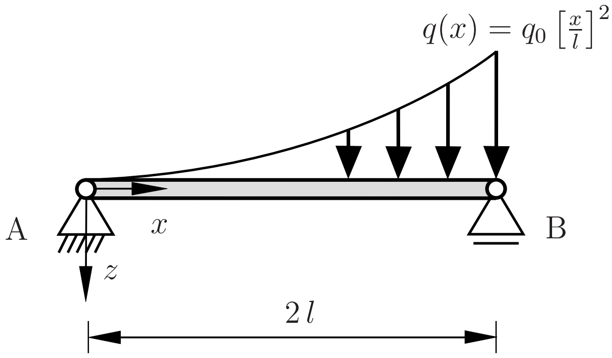
Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

a)
Das nachfolgende System besteht aus einem Balken, der wie dargestellt gelagert ist. Der Balken ist über seine gesamte Länge $2\,l$ mit einer quadratischen Streckenlast $q(x) = q_0 \left[\frac{x}{l}\right]^2$ belastet.



Berechnen Sie, an welcher Stelle x des Balkens das maximale Biegemoment $M(x)$ auftritt. Der Angriffspunkt der resultierenden Streckenlast ist bereits als $x_R = 3\,l/2$ gegeben. Verwenden Sie das vorgegebene lokale Koordinatensystem. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. **(3,0 Punkte)**

$x = \sqrt[3]{2}\,l$
An den Rändern ist $M(x) = 0$, daher tritt das maximale Moment tatsächlich an der berechneten Stelle x auf.

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

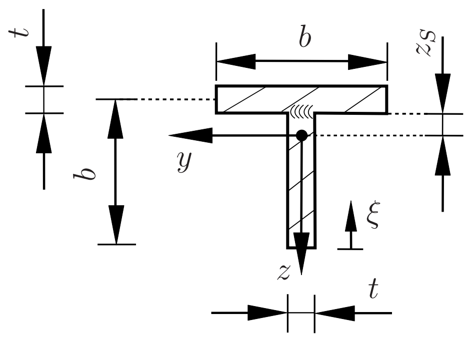
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Begründen Sie aufgrund ihres Ergebnisses aus dem ersten Aufgabenteil, welche Stelle x der Balkenachse für den Spannungsnachweis hinsichtlich maximaler Normalspannungen maßgebend ist. **(0,5 Punkte)**

Die maximale Normalspannung tritt ebenfalls an der berechneten Stelle x auf, da $\sigma = \frac{M}{I_y} z + \frac{N}{A}$ wobei die Normalkraft Null ist und I_y über die gesamte Balkenlänge konstant ist.

b)

Die Querschnittsfläche des Balkens aus Aufgabenteil a) besteht aus einem dünnwandigen T-Profil, welches aus zwei Teilstücken zusammengeschweißt wurde. Die Abmessungen der Querschnittsfläche sind der Abbildung zu entnehmen. Das Flächenträgheitsmoment des Balkens in Bezug auf das dargestellte Koordinatensystem im Schwerpunkt sowie der Abstand zwischen Schweißnaht und Schwerpunkt sind unter Berücksichtigung von $t \ll b, l$ zu



$$I_y = \frac{5\,t\,b^3}{24}, \quad z_S = \frac{b}{4}$$

bestimmt worden. Bestimmen Sie zunächst das statische Moment S in der Schweißnaht ($z = -z_S$) unter Verwendung der Koordinate ξ aus der Abbildung. Geben Sie dabei auch die wichtigsten Zwischenschritte an. **(2,0 Punkte)**

$S = \frac{1}{4} b^2 t$

Vorname: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

Berechnen Sie nun die Schubspannung τ, die am linken Balkenende in der Schweißnaht $(x = 0, z = -z_S)$ herrscht. Die Querkraft $Q(x = 0)$ ist dabei als bekannt anzunehmen und soll nicht weiter spezifiziert werden. **(1,0 Punkte)**

$$\tau = \frac{Q(x{=}0) \cdot S(z{=}-z_s)}{I_y \cdot t} = \frac{Q(x{=}0) \cdot t\, b^2/4}{5 b^3 t^2/24}$$

c)

Nehmen Sie im Folgenden an, dass der Balken mit einer konstanten Streckenlast q_0 belastet wird. Von dieser neuen Belastung sei der Biegemomentenverlauf

$$M(x) = q_0\, l\, x - \tfrac{1}{2}\, q_0\, x^2$$

bekannt. Bestimmen Sie die Stelle x^* maximaler Normalspannung. **(1,0 Punkte)**

$$x^* = l$$

Berechnen Sie nun, wie groß die Abmessung t des Balkenprofils mindestens sein muss, damit an dieser Stelle x^* die Vergleichsspannung im Sinne der Schubspannungshypothese nach Tresca den maximal zulässigen Wert $\sigma_{\mathrm{v}}^{\mathrm{zul}}$ in der Schweißnaht $(z = -z_S)$ nicht überschreitet. Geben Sie dabei auch die wichtigsten Zwischenschritte an. **(2,5 Punkte)**

$$t \geq \frac{12}{5} \frac{q_0\, l^2\, z_s}{\sigma_{\mathrm{v}}^{\mathrm{zul}}\, b^3}$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

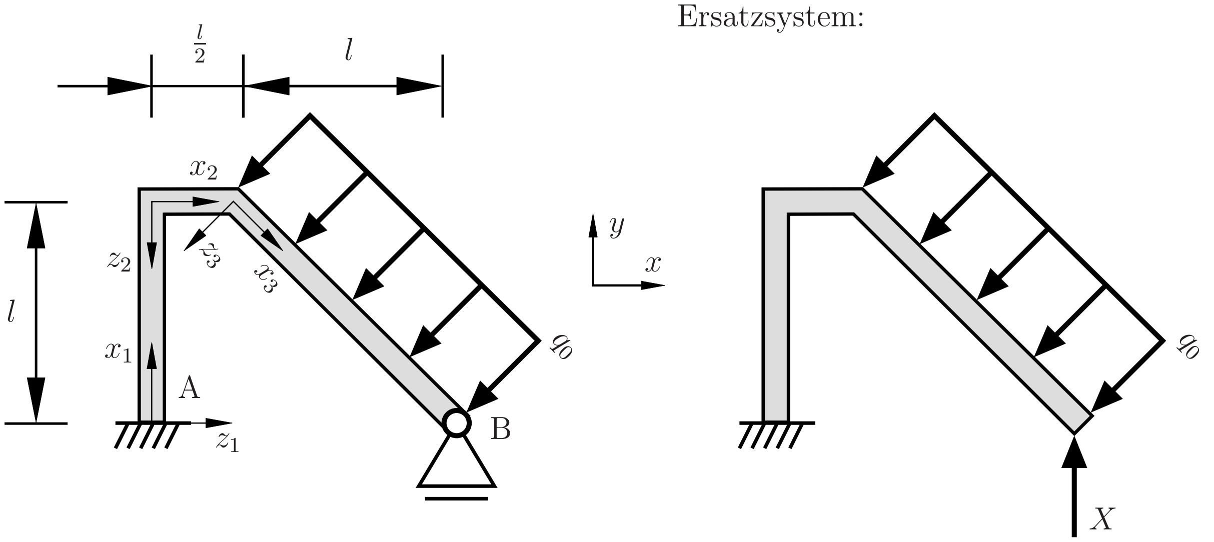
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 3 (Seite 1 von 6)

a)

Der links abgebildete Rahmen (Biegesteifigkeit EI, Dehnsteifigkeit $EA \to \infty$) ist wie dargestellt gelagert und belastet. Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit der statisch überzähligen Kraft X vorgegeben.



Für $X = 0$ ergeben sich die Lagerreaktionen im statisch bestimmten Ersatzsystem in Punkt A bezüglich der positiv definierten Koordinatenrichtungen des x-y-Koordinatensystems zu

$$A_x^{q_0} = q_0\, l, \qquad A_y^{q_0} = q_0\, l, \qquad M_A^{q_0} = \frac{1}{2} q_0\, l^2 \,.$$

Für $q_0 = 0$ ergeben sich die Lagerreaktionen im statisch bestimmten Ersatzsystem in Punkt A bezüglich der positiv definierten Koordinatenrichtungen des x-y-Koordinatensystems zu

$$A_x^{X} = 0, \qquad A_y^{X} = -\,X, \qquad M_A^{X} = -\frac{3}{2}\, X\, l \,.$$

Zeichnen Sie die Biegemomentenverläufe des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme. Zeichnen Sie dafür auf der linken Seite den Momentenverlauf M_{q_0} in Abhängigkeit von q_0 für $X = 0$. Zeichnen Sie außerdem auf der rechten Seite den Momentenverlauf M_X in Abhängigkeit von X für $q_0 = 0$. Geben Sie dabei charakteristische Werte und die jeweiligen Polynomgrade p der Funktionen mit an. Orientieren Sie sich bei der Darstellung ihrer Ergebnisse an dem **Kästchen auf der nachfolgenden Seite**. **(4,0 Punkte)**

TU Dortmund

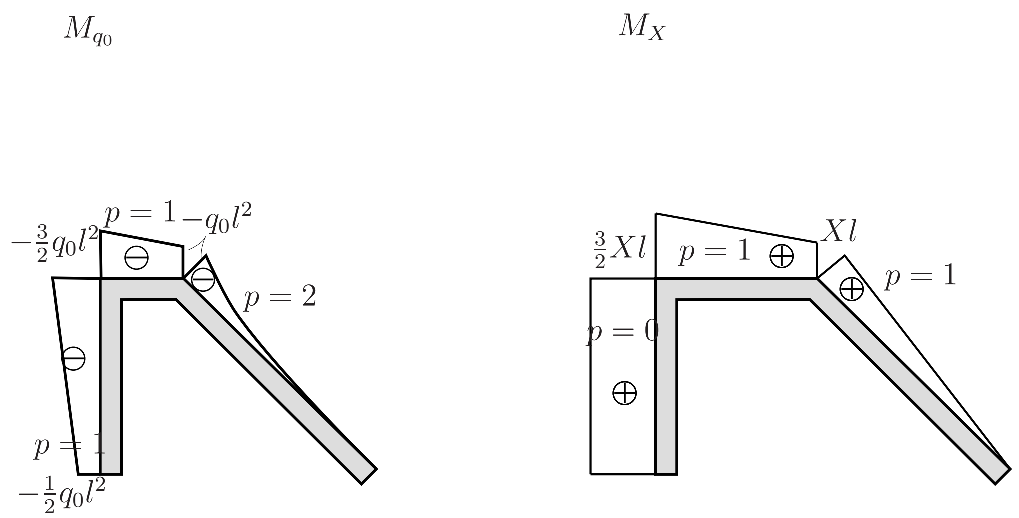
Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 3 (Seite 2 von 6)

Lösung zu Aufgabenteil a):



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

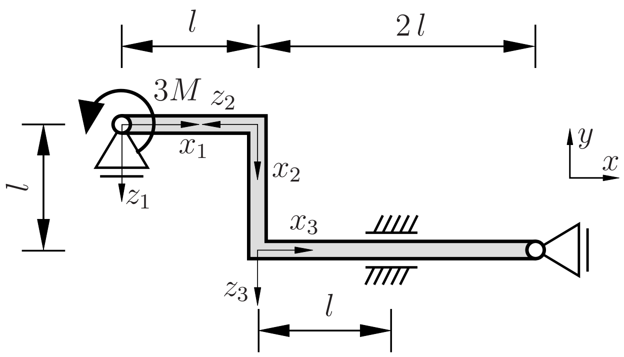
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

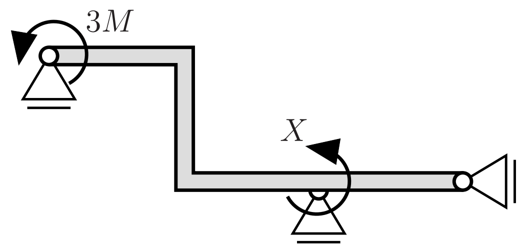
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 6)

b)
Der links abgebildete Rahmen (Dehnsteifigkeit EA, Biegesteifigkeit EI) ist wie dargestellt gelagert und belastet. Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit dem statisch überzähligen Auflagermoment X vorgegeben. Beiträge aus Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen.



Ersatzsystem:



Die Funktionen der Biegemomente und der Normalkräfte sind wie folgt für das Ersatzsystem vorgegeben und auf der folgenden Seite dargestellt:

in Abhängigkeit von M für $X = 0$:

$$M_M(x_1) = 3M\,(\frac{1}{2l}\,x_1 - 1)$$

$$M_M(x_2) = -\frac{3}{2}\,M$$

$$M_M(x_3) = \frac{3}{2}\,M\,(\frac{x_3}{l} - 1) \qquad 0 \leq x_3 \leq l$$

$$N_M(x_1) = 0$$

$$N_M(x_2) = \frac{3}{2l}\,M$$

$$N_M(x_3) = 0$$

in Abhängigkeit von X für $M = 0$:

$$M_X(x_1) = X\,\frac{x_1}{2l}$$

$$M_X(x_2) = \frac{1}{2}\,X$$

$$M_X(x_3) = \frac{1}{2l}\,X\,(l + x_3) \qquad 0 \leq x_3 \leq l$$

$$N_X(x_1) = 0$$

$$N_X(x_2) = \frac{1}{2l}\,X$$

$$N_X(x_3) = 0$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

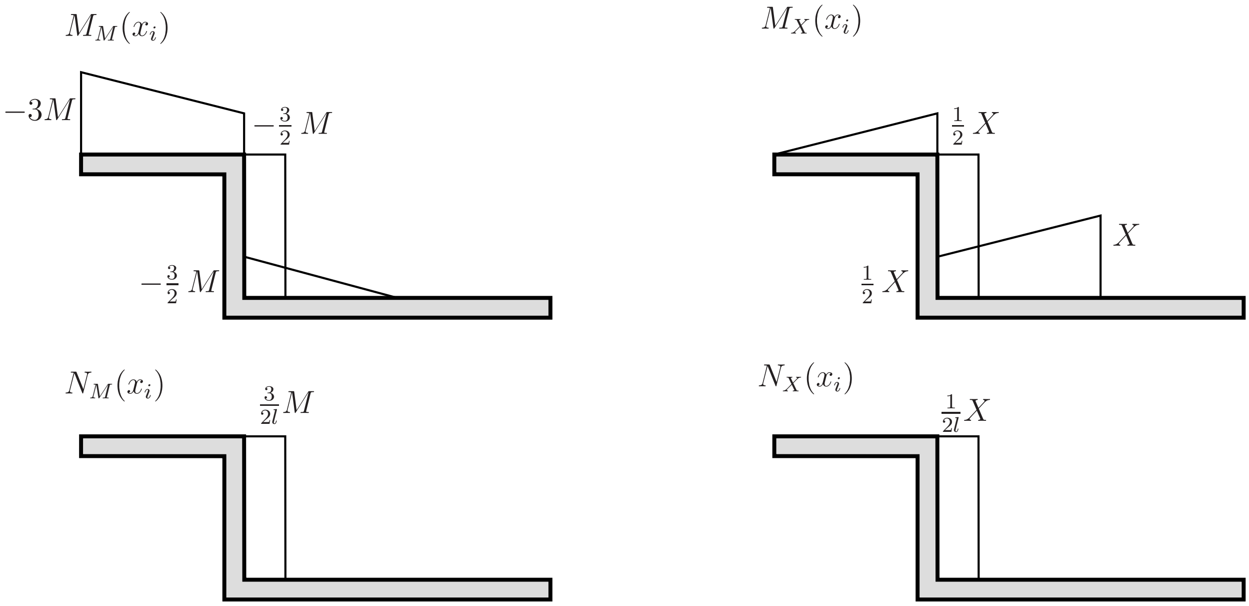
TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 3 (Seite 4 von 6)



Berechnen Sie das statisch überzählige Moment X. Geben Sie dazu die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis an. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. (**4,5 Punkte**)

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 3 (Seite 5 von 6)

Lösung zu Aufgabenteil b):

$$\alpha_{10} = \frac{-\frac{21}{12}M\ l}{EI} + \frac{\frac{M}{4\ l}}{EA}$$

$$\alpha_{11} = \frac{\frac{11}{12}l}{EI} + \frac{\frac{1}{4\ l}}{EA}$$

$$\bar{X} = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 6 von 6)

Betrachtet werden soll nun der Biegemomentenverlauf im zweiten Balkenabschnitt $0 \leq x_2 \leq l$. Nehmen Sie dazu zunächst an, dass das System als dehnstarr ($EA \to \infty$) betrachtet werden kann und berechnen Sie die nun resultierende statisch überzählige Kraft X. Bestimmen Sie anschließend den Momentenverlauf $M(x_2)$ im zweiten Balkenabschnitt.

(1,5 Punkte)

$X = \frac{21}{11} M$

$M(x_2) = M_0(x_2) + X M_1(x_2) = \frac{5}{11} M$