TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

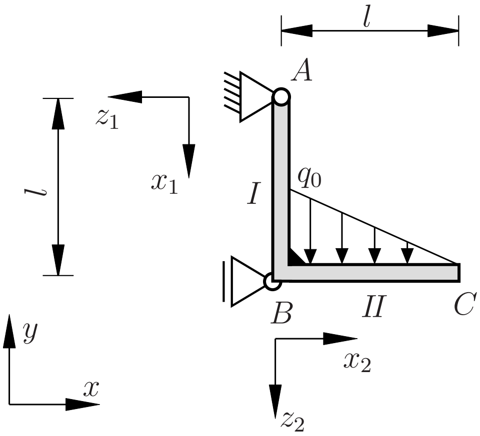
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

Ein masseloser Rahmen (Biegesteifigkeit EI, Dehnsteifigkeit EA) wird durch eine Streckenlast mit Maximalwert q_0 wie dargestellt belastet. Die Lagerung ist der Skizze zu entnehmen. Die Lagerreaktionen wurden bereits zu

$$A_x = -\frac{1}{6}\,q_0\,l, \quad A_y = \frac{1}{2}\,q_0\,l, \quad B_x = \frac{1}{6}\,q_0\,l$$

bezüglich des globalen x-y-Koordinatensystems bestimmt.



a)

Geben Sie alle **dynamischen** Randbedingungen im Punkt C sowie alle **kinematischen** Übergangsbedingungen im Punkt B an, die zur eindeutigen Bestimmung der Biegelinen $w_i(x_i)$ des Gesamtsystems verwendbar sind. Machen Sie kenntlich, auf welchen Bereich sich die verwendeten Funktionen beziehen und nutzen Sie nur die in der Aufgabenstellung angegeben Größen. **(3,0 Punkte)**

Dynamische Randbedingungen im Punkt C:
$M_2(x_2 = l) = 0, \quad Q_2(x_2 = l) = 0$

Kinematische Übergangsbedingungen im Punkt B:
$w_1(x_1 = l) = 0, \quad w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0),$
$w_2(x_2 = 0) = u_1(x_1 = l) = \Delta l_1 = \int_0^l \frac{N_1(x_1)}{EA} dx_1 = \int_0^l \frac{A_y}{EA} dx_1 = \frac{1}{2}\frac{q_0\,l^2}{EA}$

b)

Berechnen Sie die Funktion der Biegelinie des Rahmens zwischen den Punkten B und C. Sie dürfen **zwei** der dabei auftretenden Konstanten unbestimmt lassen. Tragen Sie die wichtigsten Zwischenschritte sowie das Ergebnis in das Kästchen auf der nachfolgenden Seite ein. **(3,0 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

$q(x_2) = q_0 \left[1 - \frac{x_2}{l}\right]$

$EIw_2^{(IV)}(x_2) = q_0 \left[1 - \frac{x_2}{l}\right]$
$EIw_2^{(III)}(x_2) = -\frac{l}{2} q_0 \left[1 - \frac{x_2}{l}\right]^2 + C_1$
$EIw_2^{(II)}(x_2) = \frac{l^2}{6} q_0 \left[1 - \frac{x_2}{l}\right]^3 + C_1 x_2 + C_2$
$EIw_2^{(I)}(x_2) = -\frac{l^3}{24} q_0 \left[1 - \frac{x_2}{l}\right]^4 + \frac{1}{2} C_1 x_2^2 + C_2 x_2 + C_3$
$EIw_2(x_2) = \frac{l^4}{120} q_0 \left[1 - \frac{x_2}{l}\right]^5 + \frac{1}{6} C_1 x_2^3 + \frac{1}{2} C_2 x_2^2 + C_3 x_2 + C_4$

mit $C_1 = 0, \quad C_2 = 0$

Alternativ über Schnittmoment $M_2(x_2)$ und zweifache Integration.

c)

Dieselbe Rahmen-Konstruktion erfährt nun eine abweichende und nicht näher spezifizierte Belastung. Die Biegelinie $w_2(x_2)$ zwischen den Punkten B und C sei für diesen Fall durch

$$w_2(x_2) = \frac{q_0}{360\,EI} \left[\frac{1}{l^2}\,[x_2 - l]^6 + 26\,l^3 x_2 + 180\,l^2 \frac{EI}{EA} - l^4\right]$$

gegeben. Geben Sie an, wie groß die Belastung q_0 maximal sein darf, damit die Durchbiegung des Balkens im Punkt C den Wert $d_{\max}$ nicht überschreitet. **(0,5 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

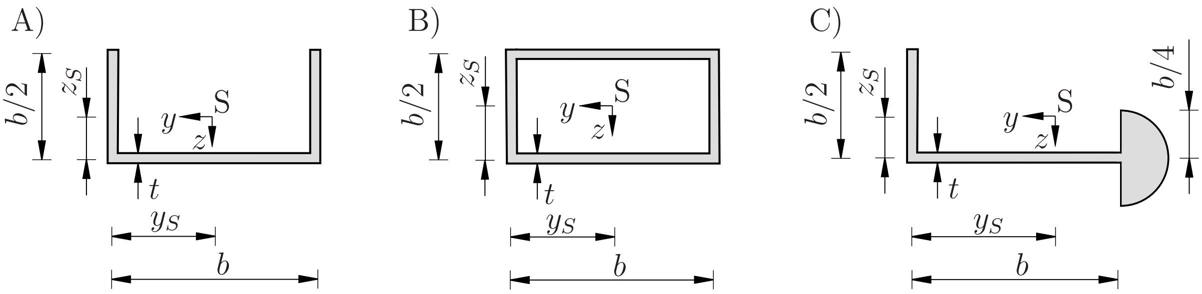
Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

$w_2(x_2 = l) = \frac{q_0}{360\,EI}\left[26\,l^4 + 180\,l^2\frac{EI}{EA} - l^4\right] < d_{\max}$

$\Leftrightarrow q_0 < \frac{360\,EI}{25\,l^4 + 180\,l^2\frac{EI}{EA}} d_{\max}$

d)

Für die Konstruktion des Rahmens stehen drei unterschiedliche, dünnwandige Profile (A,B,C) mit konstanter Dichte zur Verfügung, welche in der nachfolgenden Abbildung dargestellt sind. Die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen ($t \ll b$). Zur Auswahl des Profils sollen zwei Kriterien herangezogen werden: Der Rahmen soll sich **ausschließlich um die y-Achse** biegen und die Durchbiegung soll **möglichst gering** sein. Welches Profil sollte gewählt werden, um beide Kriterien bestmöglich zu erfüllen? Es wird dabei angenommen, dass die Belastung in der Mitte des horizontalen Profilabschnitts (Breite b) angreift. Begründen Sie ihre Wahl. **(1,0 Punkte)**



Ausgewähltes Profil: B

Begründung: C würde eine schiefe Biegung hervorrufen, da $y_s \neq b/2$. A hat ein kleineres Flächenträgheitsmoment als B, da der obere Teil fehlt. Somit würde A eine größere Biegung hervorrufen.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

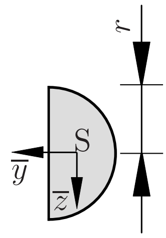
e)

Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment I_y des Profils C bezüglich des y-z-Schwerpunktkoordinatensystems, welches in Aufgabenteil d) vorgegeben ist. Die Lage des Gesamtschwerpunktes sei durch y_S, z_S bekannt. Fassen Sie einzelne Terme nicht zusammen. (**2,5 Punkte**)

Hinweis:
Für das Flächenträgheitsmoment eines Halbkreises gilt

$$I_{\overline{y}} = \frac{\pi\, r^4}{8}$$

in Bezug auf die Angaben in der nebenstehenden Skizze.



$$I_y = \frac{t\,[b/2]^3}{12} + \left[\frac{b}{4} - z_s\right]^2 \frac{b}{2}\,t + \frac{b\,t^3}{12} + z_s^2\,b\,t + \frac{\pi\,r^4}{8} + z_s^2\,\frac{\pi\,r^2}{2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

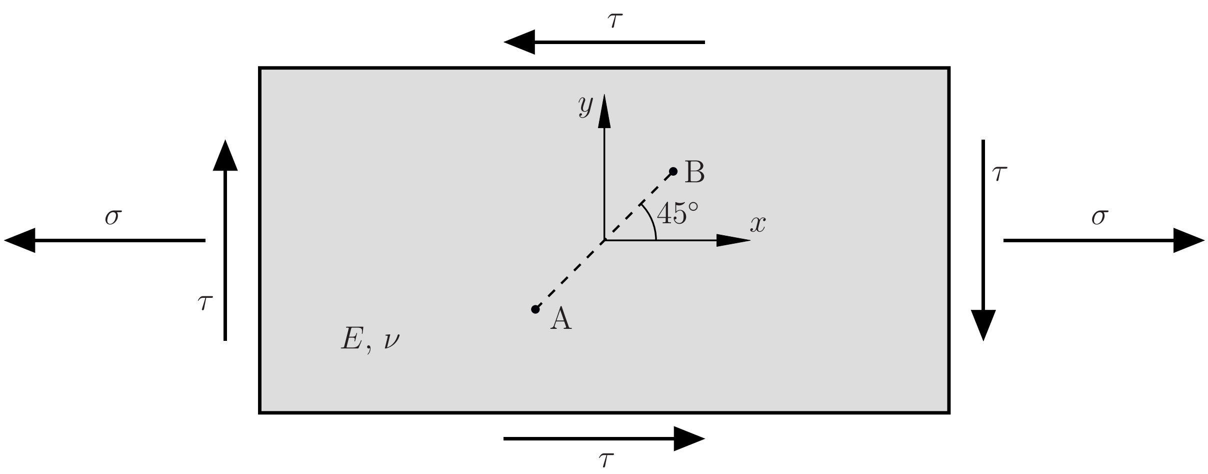
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 5)

Der hier dargestellte Ausschnitt eines Körpers wird durch eine Schubspannung τ sowie eine Normalspannung σ belastet. Für das System kann ein ebener Spannungszustand angenommen werden. Das Material kann mit einem isotropen linearen Materialmodell mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν beschrieben werden. Des Weiteren ist die Linie $\overline{\mathrm{AB}}$ gegeben, welche die Punkte A und B verbindet und einen Winkel von 45° zur x-Koordinate aufweist.



a)
Berechnen Sie den Verzerrungszustand $\boldsymbol{\varepsilon}$ des Systems bezogen auf das gegebene x-y-z-Koordinatensystem. **(2,0 Punkte)**

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{x,y,z} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} \sigma & -(1+\nu)\,\tau & 0 \\ -(1+\nu)\,\tau & -\nu\,\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\,\sigma \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Berechnen Sie die relative Längenänderung $\varepsilon_{\mathrm{AB}}$ der Linie $\overline{\mathrm{AB}}$. **(1,5 Punkte)**

$$\varepsilon_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2\,E}\,\left((1-\nu)\,\sigma - 2\,(1+\nu)\,\tau\right)$$

Wie groß muss die Normalspannung σ in Abhängigkeit der Schubspannung τ sein, damit die Linie $\overline{\mathrm{AB}}$ ihre Länge nicht ändert. **(1,0 Punkte)**

$$\sigma(\tau) = 2\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,\tau$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

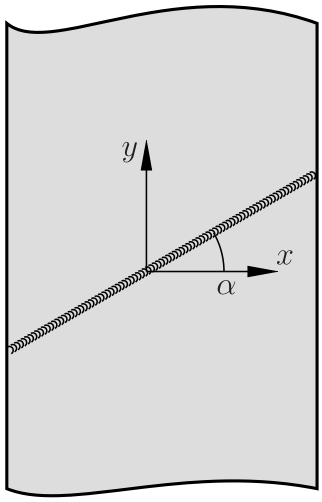
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 5)

b)

Bei einer Konstruktion sollen zwei Bleche durch eine Schweißnaht verbunden werden. Durch eine numerische Simulation ist bekannt, dass der Spannungszustand bezogen auf ein x-y-Koordinatensystem an der Stelle der Schweißnaht gegeben ist als

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y} = \begin{bmatrix} 20 & -5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$



Dabei wurde ein ebener Spannungszustand angenommen. Im Laufe der Entwicklung kommt nun die Frage auf, in welchem Winkel die Schweißnaht zu setzen ist.

Ein erster Vorschlag ist, die Schweißnaht unter einem Winkel von 30° bezüglich der x-Koordinate anzubringen. Welche Normalspannung σ_{30° (senkrecht zur Schweißnaht) und Schubspannung τ_{30° würden dann auf die Schweißnaht wirken? **(1,5 Punkte)**

$$\sigma_{30^\circ} = \frac{65 + 10\sqrt{3}}{4} = 20.58012702\,\text{MPa}$$

$$\tau_{30^\circ} = -\frac{10 + 5\sqrt{3}}{4} = -4,66506351\,\text{MPa}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Es kann angenommen werden, dass die Schubspannung in Richtung der Schweißnaht ausschlaggebend für die Auslegung der Schweißnaht ist. Unter welchem Winkel α würden Sie die Schweißnaht setzen? Geben Sie auch eine kurze Begründung an. **(1,5 Punkte)**

$\alpha = -31,71747441^\circ$ oder $58,28252559^\circ$

Hauptspannungszustand - Schubspannungen verschwinden

c)
In einem kartesischen Koordinatensystem mit Koordinaten x, y, z sei das folgende ebene Verschiebungsfeld gegeben.

$$\boldsymbol{u}(x,y) = \frac{u_0}{l^2}\left[(2\,x^2 + x\,y)\,\boldsymbol{e}_x + y^2\,\boldsymbol{e}_y\right]$$

Berechnen Sie den Verzerrungszustand $\boldsymbol{\varepsilon}$ bezogen auf das gegebene Koordinatensystem. **(1,0 Punkte)**

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{x,y} = \frac{u_0}{l^2}\begin{bmatrix} 4\,x + y & x/2 \\ x/2 & 2\,y \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 5 von 5)

d)
In einem weiteren System sei der Spannungszustand bezogen auf ein kartesischen Koordinatensystem mit Koordinaten x, y, z bekannt als

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \frac{\sigma_0}{l^2} \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & 2\,x\,y & 0 \\ 2\,x\,y & 2\,y^2 + l^2 & 0 \\ 0 & 0 & -z^2 \end{bmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Volumenkraft $\boldsymbol{f}$, welche zum gegebenen Spannungszustand geführt hat. **(1,5 Punkte)**

$$\boldsymbol{f} = \frac{\sigma_0}{l^2} \begin{bmatrix} -4\,x \\ -6\,y \\ 2\,z \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

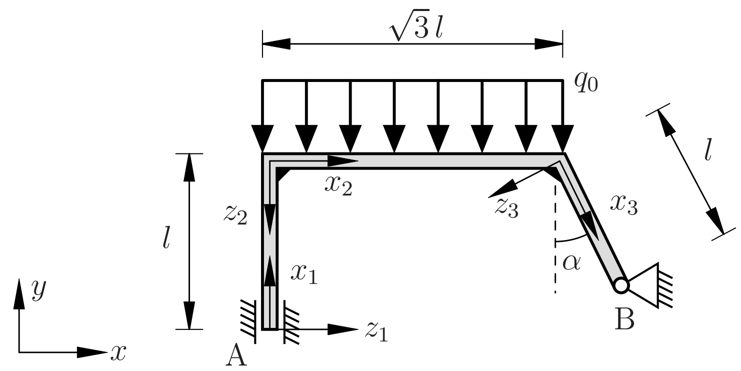
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 6)

a)
Das untenstehende, statisch unbestimmte Rahmensystem (Biegesteifigkeit EI, Dehnsteifigkeit EA) ist durch eine konstante Streckenlast mit dem Betrag q_0 belastet. Die Lagerung des Rahmens ist der Skizze zu entnehmen.



Auch an statisch unbestimmten Systemen lassen sich unter Umständen bestimmte Reaktionskräfte direkt bestimmen. Beschreiben Sie kurz (ohne Rechnung) welche Reaktionskräfte dieses Systems direkt berechnet werden können (Winkel α im Bereich $0° \leq \alpha \leq 90°$). Gibt es einen Winkel α für den sich weitere Reaktionskräfte des unbestimmten Systems direkt bestimmen lassen? Begründen Sie. **(1,5 Punkte)**

globales Koordinatensystem x-y eingeführt:

Reaktionskräfte direkt bestimmbar:

B_y bestimmbar aus $\sum F_{iy} = 0$

Winkel α, sodass weitere Reaktionskräfte direkt bestimmbar:

$\alpha = 0°$, sodass M_A bestimmbar aus $\sum M_i^A = 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

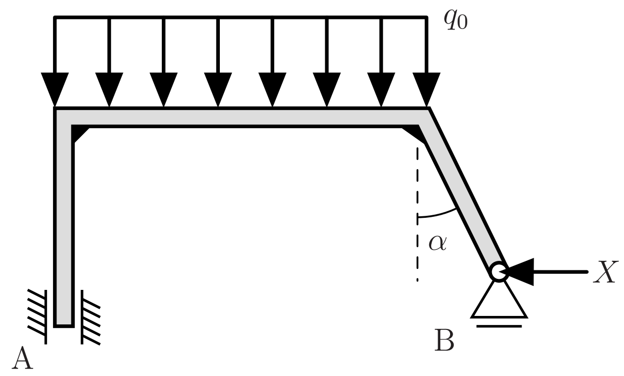
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

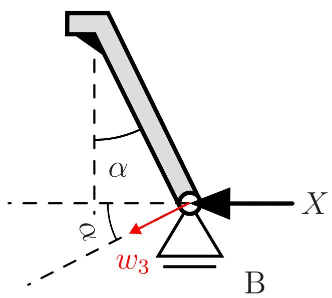
Aufgabe 3 (Seite 2 von 6)

b)
Zeichnen Sie ein statisch bestimmtes Ersatzsystem, welches sich ergibt, wenn das Festlager in B durch ein Loslager ersetzt wird. Geben Sie zudem die Kompatibilitätsbedingung an, welche sich im Lager B ergibt. Nutzen Sie dafür die vorgegebene Koordinate x_3 für den rechten Rahmenabschnitt. Die zugehörige Biegelinie sei mit $w(x_3)$ bezeichnet.
(1,0 Punkte)

Skizze:



Kompatibilitätsbedingung: $\cos(\alpha)\, w(x_3 = l) = 0$



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

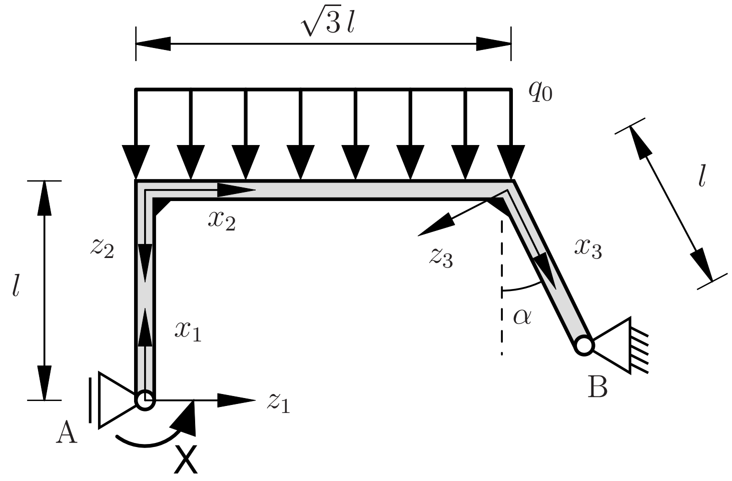
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 6)

c)
Ein alternatives Ersatzsystem ist in der untenstehenden Abbildung dargestellt. Dabei wurde die Schiebehülse in A durch ein Loslager ersetzt und das statisch überzählige Moment X eingeführt. Beiträge aus Schubverformung sind zu vernachlässigen.



Die Funktionen der Normalkräfte und Biegemomente sind für dieses System, unter der Annahme von $\alpha = 60°$, wie folgt vorgegeben:

in Abhängigkeit von X für $q_0 = 0$:

$$N_X(x_1) = 0$$

$$N_X(x_2) = \frac{2\,X}{l}$$

$$N_X(x_3) = \frac{\sqrt{3}\,X}{l}$$

$$M_X(x_1) = -X + \frac{2\,X\,x_1}{l}$$

$$M_X(x_2) = X$$

$$M_X(x_3) = \frac{X}{l}\,[l - x_3]$$

in Abhängigkeit von q_0 für $X = 0$:

$$N_q(x_1) = 0$$

$$N_q(x_2) = 6\,q_0\,l$$

$$N_q(x_3) = \frac{5}{2}\sqrt{3}\,q_0\,l$$

$$M_q(x_1) = 6\,q_0\,l\,x_1$$

$$M_q(x_2) = M_q(x_1 = l) - \frac{1}{2}\,q_0\,x_2^2$$

$$M_q(x_3) = \frac{9}{2}\,q_0\,l\,[l - x_3]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

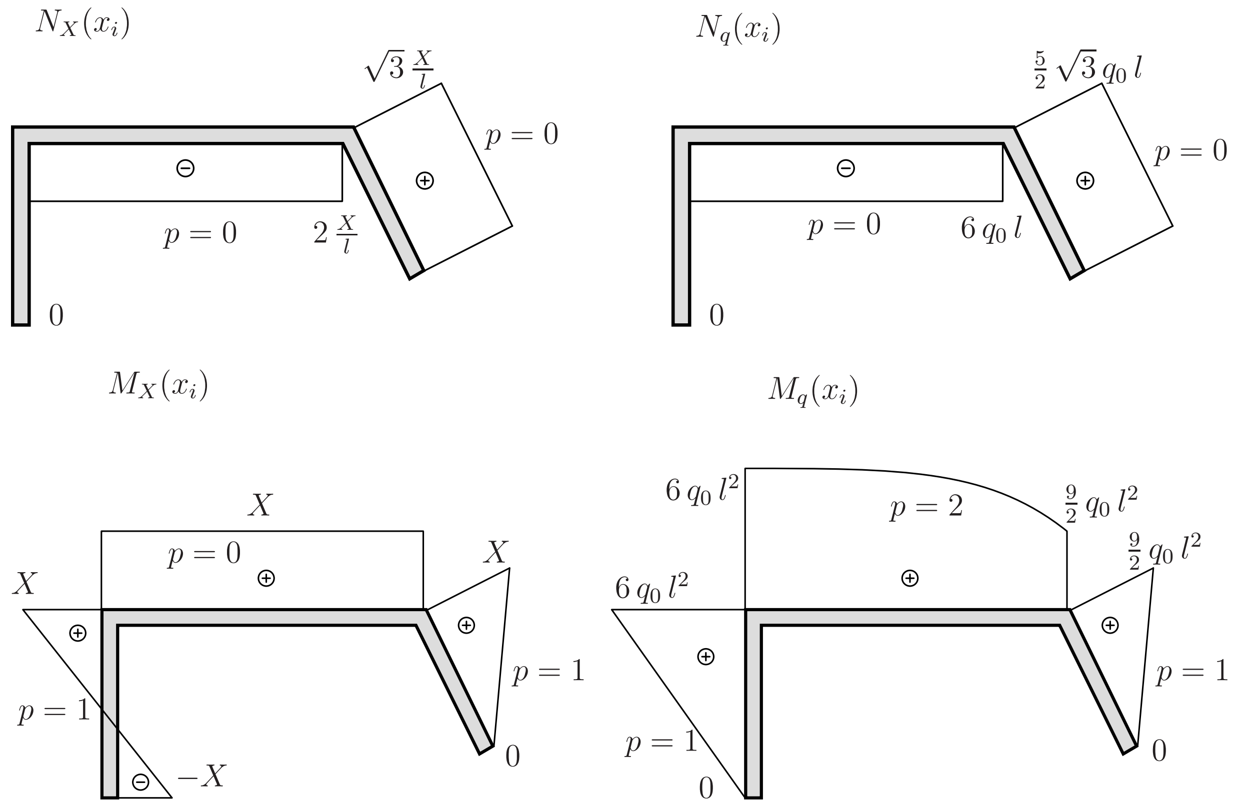
Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 6)

Die grafische Darstellung der Verläufe ergibt sich für $\alpha = 60°$ zu



Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 5 von 6)

Berechnen Sie das statisch überzählige Moment X. Geben Sie dabei die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis an. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig nachvollziehbar dargestellt wird. Die Ergebnisse sollen **nicht** vereinfacht werden. **(4,5 Punkte)**

$$\alpha_{10} = \int \frac{N_X\,N_q}{E\,A}\,\mathrm{d}x + \int \frac{M_X\,M_q}{E\,I}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha_{11} = \int \frac{N_X\,N_X}{E\,A}\,\mathrm{d}x + \int \frac{M_X\,M_X}{E\,I}\,\mathrm{d}x$$

$$\alpha_{10} = \frac{1}{E\,A}\left[12\,q_0\,\sqrt{3}\,l + \frac{15}{2}\,q_0\,l\right]$$
$$+ \frac{1}{E\,I}\left[\frac{1}{6}\,l\,6\,q_0\,l^2\,[-1+2] + \frac{2}{3}\,\sqrt{3}\,l\,1\,\frac{3}{2}\,q_0\,l^2 + \sqrt{3}\,l\,1\,\frac{9}{2}\,q_0\,l^2 + \frac{1}{3}\,l\,\frac{9}{2}\,q_0\,l^2\right]$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{E\,A}\left[\sqrt{3}\,l\,\frac{4}{l^2} + l\,\frac{3}{l^2}\right]$$
$$+ \frac{1}{E\,I}\left[\frac{1}{6}\,l\,[2+2-1-1] + \sqrt{3}\,l + \frac{1}{3}\,l\right]$$

$$X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}$$

TU Dortmund

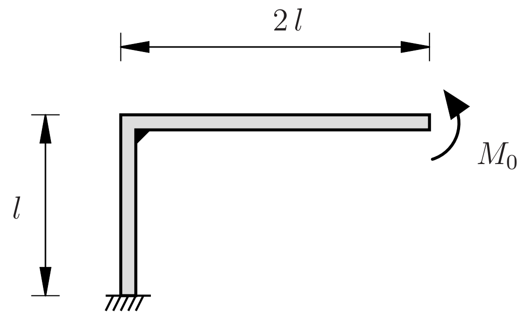
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

d)
Der dargestellte, dehnstarre Rahmen ($EA \to \infty$) ist fest eingespannt und weist die Biegesteifigkeit EI auf. An seinem freien Ende wird der Balken durch ein Moment M_0 belastet.



Bestimmen Sie die im dargestellten System gespeicherte Formänderungsenergie Π in Abhängigkeit der gegebenen Größen. Beiträge aus Schubverformung sind zu vernachlässigen. **(2,0 Punkte)**

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_0^2}{E\,I}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{2\,l} \frac{M_0^2}{E\,I}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{M_0^2}{E\,I}\,(l + 2\,l)$$

Bestimmen Sie den Betrag φ_M, um welchen sich der Endpunkt des Rahmens in Richtung des Moments verdreht. **(1,0 Punkte)**

$$\varphi_M = \frac{\partial \Pi}{\partial M} = \frac{3\,M_0\,l}{E\,I}$$