TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

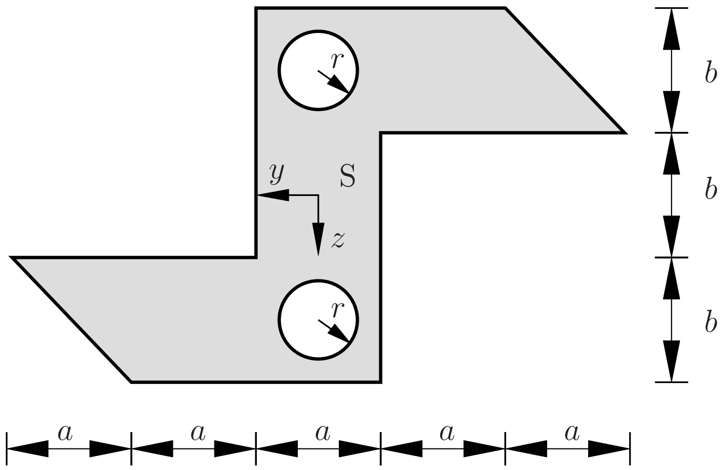
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)
Gegeben ist das Profil eines Trägers mit den Abmessungen a und b. Das Profil beinhaltet zwei Bohrungen mit den Radien r.

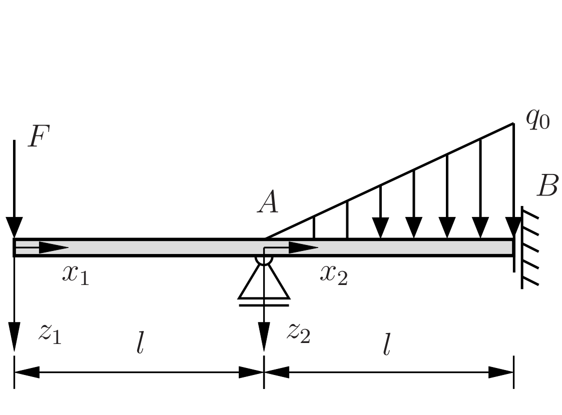


Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment I_y bezüglich des gegebenen y-z-Schwerpunktkoordinatensystems. Fassen Sie die einzelnen Terme **nicht** zusammen. **(2,0 Punkte)**

$$I_y = \frac{a\,b^3}{12} + 2\left[\frac{2\,a\,b^3}{12} + b^2\,2\,a\,b + \frac{a\,b^3}{36} + \left(\frac{5}{6}\,b\right)^2 \frac{1}{2}\,a\,b - \frac{\pi\,r^4}{4} - b^2\,\pi\,r^2\right]$$
$$= \frac{31}{6} a\,b^3 - \frac{\pi\,r^4}{2} - 2\,b^2\,\pi\,r^2$$

b)
Der wie dargestellt gelagerte Balken (Länge $2\,l$, Biegesteifigkeit EI) wird durch eine linear verlaufende Streckenlast (Maximalwert q_0) und eine Einzelkraft ($F = q_0\,l$) belastet. Die in positive x_1-z_1-Koordinatenrichtung angenommenen Lagerreaktionen wurden bereits bestimmt zu

$$A_{z_1} = -\frac{3}{2} q_0\,l \quad B_{x_1} = 0 \quad M_{y_1,B} = -\frac{2}{3}\,q_0\,l^2.$$



Bestimmen sie die Biegemomentenverläufe $M_1(x_1)$ und $M_2(x_2)$ des Balkens bezüglich der vorgegebenen Koordinatensysteme. **(1,5 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

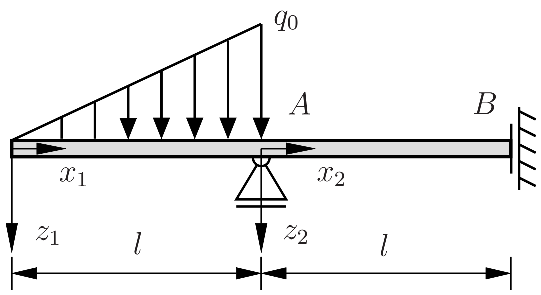
$$M_1(x_1) = -q_0\, l\, x_1$$

$$M_2(x_2) = -\frac{1}{6}\, q_0\, \frac{x_2^3}{l} + \frac{1}{2}\, q_0\, l\, x_2 - q_0\, l^2$$

Für einen anderen Lastfall wurden die Biegemomentenverläufe bereits bestimmt:

$$M_1(x_1) = -\frac{1}{6}\, q_0\, \frac{x_1^3}{l}$$

$$M_2(x_2) = -\frac{1}{6}\, q_0\, l^2$$



Berechnen Sie die Funktionen der Biegelinien $w_1(x_1)$ für $0 \leq x_1 \leq l$ sowie $w_2(x_2)$ für $0 \leq x_2 \leq l$ für das gegebene System inklusive der Bestimmung aller Integrationskonstanten. Tragen Sie die wichtigsten Zwischenritte sowie das Ergebnis in das nachfolgende Kästchen ein. **(4,0 Punkte)**

$$E\,I\,w_1''(x_1) = \frac{1}{6}\, q_0\, \frac{x_1^3}{l} \qquad E\,I\,w_2''(x_2) = \frac{1}{6}\, q_0\, l^2$$

$$E\,I\,w_1'(x_1) = \frac{1}{24}\, q_0\, \frac{x_1^4}{l} + C_1 \qquad E\,I\,w_2'(x_2) = \frac{1}{6}\, q_0\, l^2\, x_2 + C_3$$

$$E\,I\,w_1(x_1) = \frac{1}{120}\, q_0\, \frac{x_1^5}{l} + C_1\, x_1 + C_2 \qquad E\,I\,w_2(x_2) = \frac{1}{12}\, q_0\, l^2\, x_2^2 + C_3\, x_2 + C_4$$

Rand- und Übergangsbedingungen

$$w_2(x_2 = 0) = 0 \qquad \Rightarrow C_4 = 0$$

$$w_2'(x_2 = l) = 0 \qquad \Rightarrow C_3 = -\frac{1}{6}\, q_0\, l^3$$

$$w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0) \qquad \Rightarrow C_1 = -\frac{5}{24}\, q_0\, l^3$$

$$w_1(x_1 = l) = 0 \qquad \Rightarrow C_2 = \frac{1}{5}\, q_0\, l^4$$

Biegelinien

$$E\,I\,w_1(x_1) = \frac{1}{120}\, q_0\, \frac{x_1^5}{l} - \frac{5}{24}\, q_0\, l^3\, x_1 + \frac{1}{5}\, q_0\, l^4$$

$$E\,I\,w_2(x_2) = \frac{1}{12}\, q_0\, l^2\, x_2^2 - \frac{1}{6}\, q_0\, l^3\, x_2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

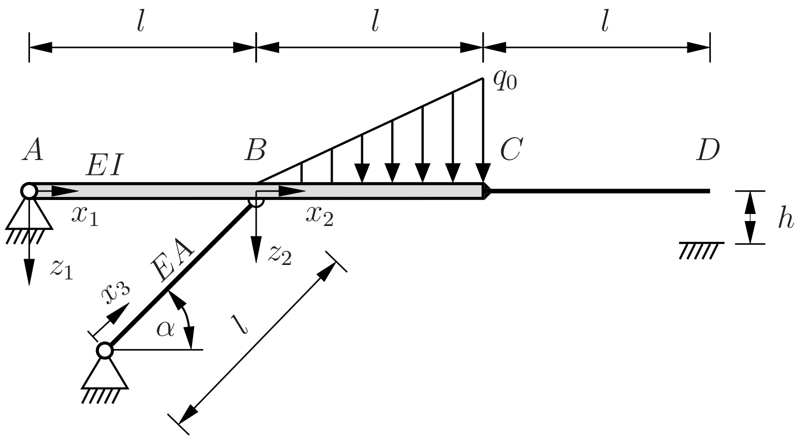
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)
Das dargestellte System besteht aus einem dehnstarren Balken (Biegesteifigkeit EI), welcher durch eine geneigte Pendelstütze mit der Dehnsteifigkeit EA gestützt wird. Am rechten Ende des Balkens ist ein starrer Stab angeschweißt. Die genauen Abmessungen sowie die lokalen Koordinatensysteme sind der Abbildung zu entnehmen.



Geben sie die kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen in **Punkt *B*** an, die zur vollständigen Bestimmung der Biegelinien $w_1(x_1)$ für $0 \le x_1 \le l$ sowie $w_2(x_2)$ für $0 \le x_2 \le l$ des horizontalen Balkens erforderlich sind. Die Ausdehnung $u(x_3)$ der Pendelstütze sei bekannt. **(1,5 Punkte)**

$$w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0)$$
$$w_1(x_1 = l) = w_2(x_2 = 0) = -\frac{u_3(x_3 = l)}{\sin\alpha}$$

Für den Fall, dass die Pendelstütze ebenfalls dehnstarr ist ($EA \to \infty$), seien die Biegelinien $w_1(x_1)$ und $w_2(x_2)$ bereits bekannt. Wie groß müsste für diesen Fall der Abstand h mindestens sein, sodass das Ende des angeschweißten Stabes im Punkt D nicht den Boden berührt. **(1,0 Punkte)**

$$h > w_2(x_2 = l) + w_2'(x_2 = l)\, l$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

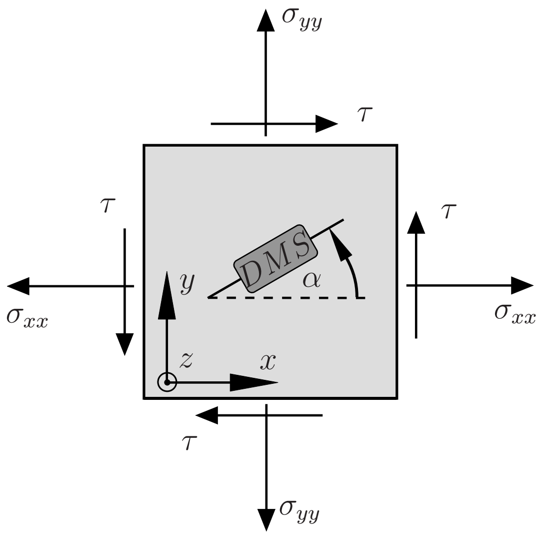
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)
Die nebenstehende Skizze zeigt eine dünne Scheibe, welche durch die Normalspannungen $\sigma_{xx} = 180\,\text{MPa}$, $\sigma_{yy} = -60\,\text{MPa}$ und eine unbekannte Schubspannung τ belastet wird. Auf der Scheibe ist ein Dehnungsmessstreifen im Winkel von $\alpha = 30°$ angebracht, welcher die Dehnung $\varepsilon_{DMS} = 10^{-3}$ misst. Das Material der Scheibe weist einen Elastizitätsmodul $E = 200000\,\text{MPa}$ und eine Querkontraktionszahl $\nu = 1/3$ auf. Das Materialverhalten kann mit einem isotropen, elatischen Materialmodell beschrieben werden. Der Spannungs- und Verzerrungszustand in der Scheibe ist homogen.



Berechnen Sie die resultierenden Verzerrungen ε_{xx} und ε_{yy} im x-y-z-Koordinatensystem. **(1,0 Punkte)**

$\varepsilon_{xx} = 10^{-3}$

$\varepsilon_{yy} = -6 \cdot 10^{-4}$

Geben Sie die Verzerrungen ε_{xy}, ε_{zz} im x-y-z-Koordinatensystem an. **(1,5 Punkte)**

$\varepsilon_{xy} = 4{,}619 \cdot 10^{-4}$

$\varepsilon_{zz} = -2 \cdot 10^{-4}$

Bestimmen Sie die Schubspannung τ wie in der Zeichnung oben angetragen. **(1,0 Punkte)**

$\tau = 69{,}282$ MPa

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

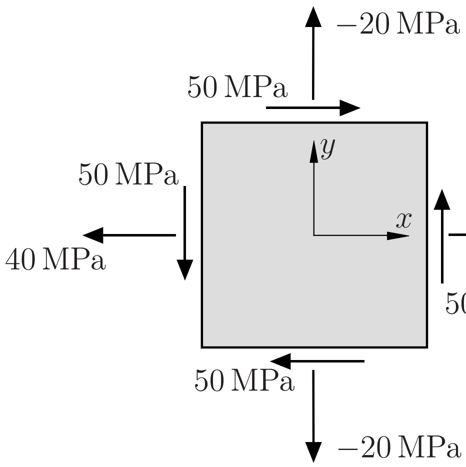
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

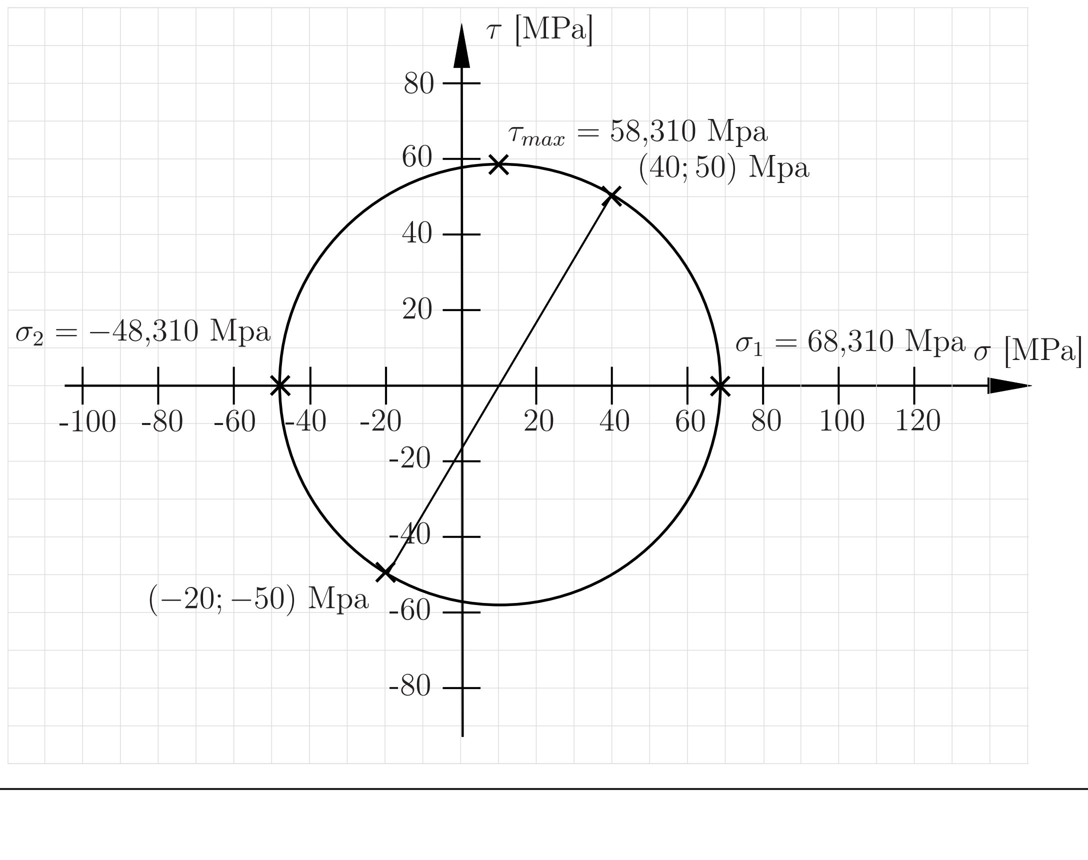
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

b)
Ein dünnes Blech wird wie in der nachfolgenden Skizze dargestellt durch die Spannungen in der Ebene belastet.



Konstruieren Sie den Mohrschen Spannungskreis durch die oben gegebenen Werte zeichnerisch und tragen Sie nachfolgend die exakten Werte für σ_1, σ_2 und τ_{max} in den Graphen ein. **(2,0 Punkte)**



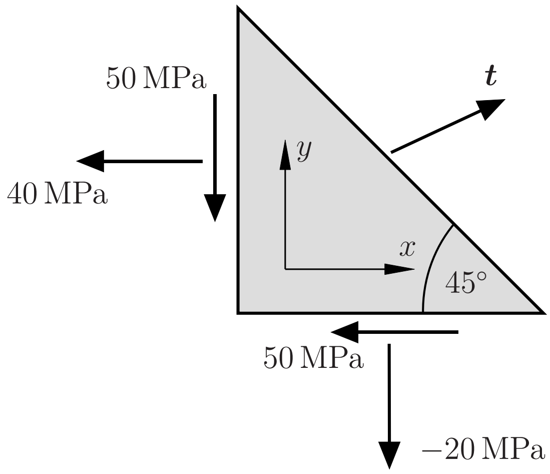
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

c)
Das dünne Blech aus b) wird im Folgenden wie nachfolgend skiziert in einem 45°-Winkel aufgeschnitten.



Berechnen Sie den resultierenden Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ im x-y-Koordinatensystem. **(1,0 Punkte)**

$$[\boldsymbol{t}]_{x,y} = \begin{bmatrix} 63{,}640 \\ 21{,}213 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

d)
Für ein anderes System wurde der Spannungstensor bezogen auf ein kartesisches x-y-z-Koordinatensystem zu

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \frac{\sigma_0}{l^2} \begin{bmatrix} 2x^2 + 7za - 6a^2 & 0 & 4z^2 - 3xa \\ 0 & 3yz & 0 \\ 4z^2 - 3xa & 0 & -2z^2 \dfrac{x}{a} \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

bestimmt. Geben Sie eine Volumenkraft $\boldsymbol{f}$ an, so dass sich das System lokal im statischen Gleichgewicht befindet. **(1,5 Punkte)**

$$[\boldsymbol{f}]_{x,y,z} = \frac{-\sigma_0}{l^2} \begin{bmatrix} 4x + 8z \\ 3z \\ -3a - 4z\frac{x}{a} \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

e)
Zu einem System sei das Verschiebungsfeld im x-y-z-Koordinatensystem mit

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \frac{u_0}{l^2}\left[(3xz + x^2)\boldsymbol{e}_x - 3y^2\boldsymbol{e}_y + (5xz - 2z^2)\boldsymbol{e}_z\right]$$

gegeben.

Geben Sie den resultierenden Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ im x-y-z-Koordinatensystem an. **(2,0 Punkte)**

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{x,y,z} = \frac{u_0}{l^2}\begin{bmatrix} 2x + 3z & 0 & \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}z \\ 0 & -6y & 0 \\ \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}z & 0 & 5x - 4z \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

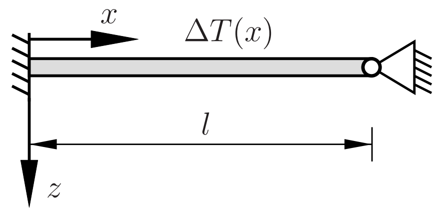
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

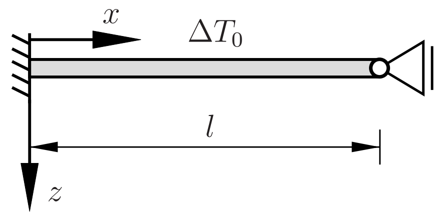
a)
Der nebenstehende, statisch unbestimmt gelagerte Stab (Elastizitätsmodul E, Flächenträgheitsmoment I, Querschnittsfläche A und Wärmdeausdehnungskoeffizient α_T) erfährt eine Temperaturänderung $\Delta T(x) = \Delta T_0 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$. Der Stab ist für $\Delta T_0 = 0$ spannungs- und verzerrungsfrei.



Berechnen Sie die Normalspannung σ im Stab, welche sich aufgrund der Temperaturänderung $\Delta T(x)$ ergibt. **(2,0 Punkte)**

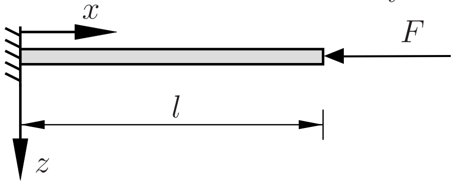
$$\sigma = -2E\alpha_T \frac{\Delta T_0}{\pi}$$

b)
Das System aus a) wird nun modifiziert, indem das Festlager durch ein Loslager ersetzt wird, siehe Abbildung rechts. Die Temperaturänderung $\Delta T(x) = \Delta T_0$ sei außerdem konstant.



Berechnen Sie die kritische Temperatur $\Delta T_0 > 0$ bei welcher der Stab ausknickt. Geben Sie dabei die relevanten Gleichungen und Zwischenergebnisse an. **(2,0 Punkte)**

Statisch bestimmtes Ersatzsystem:



$$\varepsilon(x) = \alpha_T \Delta T_0 + \frac{\sigma}{E} = \alpha_T \Delta T_0 - \frac{F}{EA}$$

$$u(x = L) = 0 \Leftrightarrow \int_0^l \varepsilon(x) \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \Delta T_0 = \frac{F}{EA\alpha_T}$$

$$\text{1. Eulerfall: } F_{krit} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \Rightarrow \Delta T_0 = \frac{\pi^2 I}{4A\alpha_T l^2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

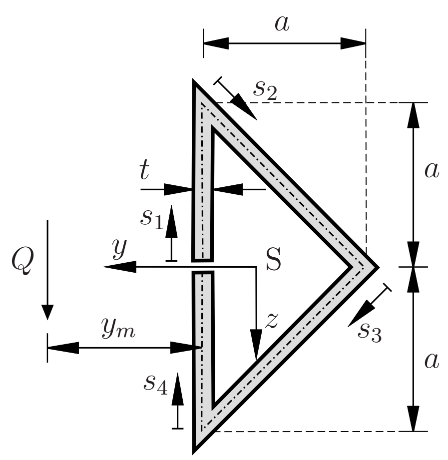
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

c)
Beschreiben Sie kurz in eigenen Worten, warum ein statisch bestimmtes System nicht aufgrund einer Temperaturänderung ausknicken kann. (**1,0 Punkte**)

Ein statisch bestimmtes System blockiert die Ausdehnung aufgrund einer Temperaturänderung nicht. Nur wenn die Ausdehnung blockiert wird, muss die Spannung der thermischen Dehnung entgegenwirken, so dass die Gesamtdehnung null ist.

d)
In dem rechts dargestellten dünnwandigem Profil ($t \ll a$) ist das Koordinatensystem im Schwerpunkt S gegeben. Die Querkraft Q wirkt im Schubmittelpunkt in z-Richtung. Das Profil ist symmetrisch zur y-Achse.



Berechnen Sie die statischen Momente $S_y(s_1)$ bezüglich der Koordinate s_1 für den Teilbereich $0 \leq s_1 \leq a$ und $S_y(s_2)$ bezüglich der Koordinate s_2 für den Teilbereich $0 \leq s_2 \leq \sqrt{2}a$ des Profils. (**1,5 Punkte**)

$$S_y(s_1) = -\frac{1}{2} t s_1^2$$

$$S_y(s_2) = -\frac{1}{2} t a^2 - s_2 t \left(a - \frac{\sqrt{2}}{4} s_2 \right)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

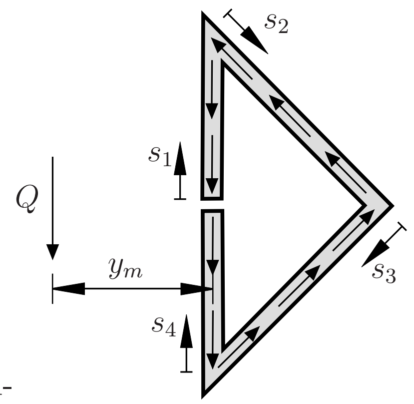
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

Berechnen Sie die Schubspannung $\tau(s_2)$ im Bereich $0 \leq s_2 \leq \sqrt{2}a$ im Profil. Zeichnen Sie zusätzlich die **Richtung** der Schubspannung, für das gesamte Profil, in die nebenstehende Skizze ein. Nehmen Sie dazu an, dass das Flächenträgheitsmoment I_y bekannt ist.
(1,0 Punkte)

$$\tau(s_2) = \frac{Q}{I_y}\left(-\frac{1}{2}a^2 - s_2 a + s_2^2\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$



Alternative: Pfeile andersrum und τ mit (-1) multiplizieren.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

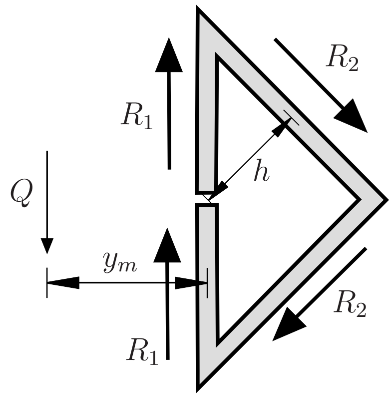
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

e)
Nehmen Sie im Folgenden an, dass die Spannungen in positive s_1, s_2 Richtung gegeben sind mit:

$$\tau(s_1) = \frac{Q}{I_y}\left(2s_1^2 - as_1\right) \qquad \tau(s_2) = \frac{Q}{I_y}\left(a^2 + \frac{2}{3}as_2 - \frac{3}{4}s_2^2\right)$$

Berechnen Sie den Abstand y_m des Schubmittelpunktes, gemessen von der linken Profilmittellinie. Geben Sie dabei relevante Zwischenschritte an. **(2,5 Punkte)**



$$\sum M = Q \cdot y_m \Leftrightarrow Qy_m = -2R_2h$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$R_2 = \int_0^{\sqrt{2}a} \tau(s_2)\mathrm{d}x \Leftrightarrow R_2 = \frac{(3\sqrt{2}+4)Qta^3}{6I_y}$$

$$\Rightarrow y_m = \frac{-R_2\sqrt{2}}{Q} = -\frac{ta^4(3+2\sqrt{2})}{3I_y}$$