TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

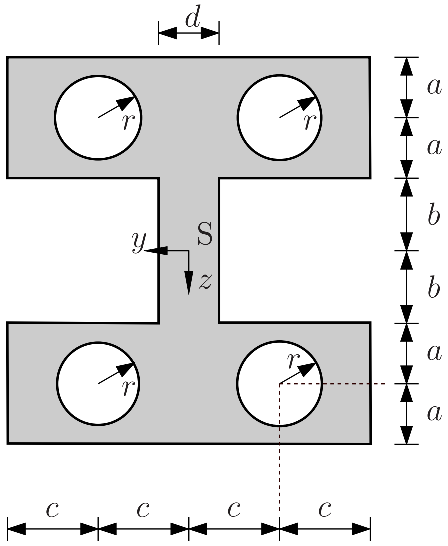
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)
Gegeben ist das abgebildete Profil eines Trägers.



Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment I_y bezüglich des gegebenen y-z-Schwerpunktkoordinatensystems in Abhängigkeit der gegebenen Größen. Fassen Sie die einzelnen Terme **nicht** zusammen. **(2,0 Punkte)**

$$I_y = \frac{2}{3}b^3 d + \frac{4}{3}a^3 c + 4ac\,[a+b]^2 - \frac{1}{4}\pi r^4 - \pi r^2\,[a+b]^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

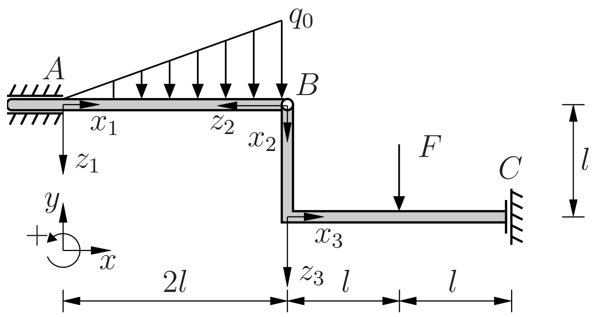
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Es wird nun das nebenstehend abgebildete System aus zwei gelenkig verbundenen Rahmen betrachtet, welches durch eine lineare Streckenlast mit Maximalwert q_0 sowie eine Einzellast $F = 2\,q_0\,l$ belastet wird. Die Auflagerreaktionen (bezogen auf das globale x-y-Koordinatensystem) wurden bereits wie folgt bestimmt:



$$A_y = 3q_0 l \qquad M_A = \frac{16}{3} q_0 l^2 \qquad C_x = 0 \qquad M_C = 2q_0 l^2$$

Berechnen Sie die Momentenverläufe $M_1(x_1)$ für $0 \leq x_1 \leq 2l$ sowie $M_3(x_3)$ für $l \leq x_3 \leq 2l$.
(1,5 Punkte)

$0 \leq x_1 \leq 2l$:

$$M_1(x_1) = -\tfrac{16}{3} q_0 l^2 + 3q_0 l x_1 - \tfrac{1}{6}\tfrac{q_0}{l} x_1^3$$

$l \leq x_3 \leq 2l$:

$$M_3(x_3) = 2q_0 l^2$$

Berechnen Sie die Funktionen der Biegelinien $w_1(x_1)$ für $0 \leq x_1 \leq 2l$ sowie $w_3(x_3)$ für $l \leq x_3 \leq 2l$ für das gegebene System. Auftretende Integrationskonstanten sollen hier *nicht* bestimmt werden.
(1,5 Punkte)

$0 \leq x_1 \leq 2l$:

$$w_1(x_1) = \tfrac{1}{EI}\left\{\tfrac{8}{3} q_0 l^2 x_1^2 - \tfrac{1}{2} q_0 l x_1^3 - \tfrac{1}{120}\tfrac{q_0}{l} x_1^5 + C_1 x_1 + C_2\right\}$$

$l \leq x_3 \leq 2l$:

$$w_3(x_3) = \tfrac{1}{EI}\left\{-q_0 l^2 x_3^2 + C_3 x_3 + C_4\right\}$$

TU Dortmund

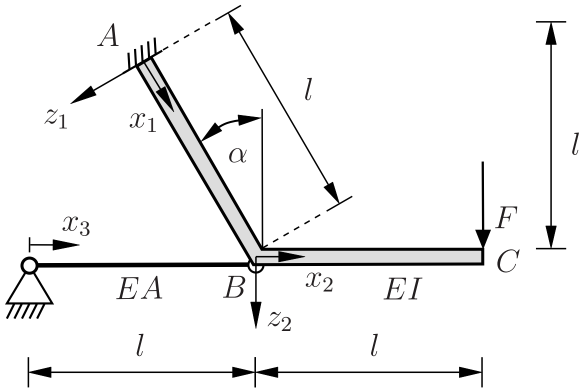
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

c)
Das dargestellte System besteht aus einem Balken (Biegesteifigkeit EI, Dehnsteifigkeit $EA \to \infty$), welcher durch eine Pendelstütze mit der Dehnsteifigkeit EA gestützt wird. Die genauen Abmessungen sowie die lokalen Koordinatensysteme sind der Abbildung zu entnehmen.



Geben Sie die kinematischen Randbedingungen für die Biegelinie im Punkt A an. **(1,0 Punkte)**

$$w_1(x_1 = 0) = 0$$
$$w_1'(x_1 = 0) = 0$$

Geben sie die kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen im Punkt B an, die zur vollständigen Bestimmung der Biegelinien $w_1(x_1)$ für $0 \leq x_1 \leq l$ sowie $w_2(x_2)$ für $0 \leq x_2 \leq l$ des Balkens erforderlich sind. Die Verschiebung $u(x_3)$ der Pendelstütze sei bekannt. **(1,5 Punkte)**

$$u_3(x_3 = l) = -\cos(\alpha) w_1(x_1 = l)$$
$$w_1(x_1 = l)\sin(\alpha) = w_2(x_2 = 0)$$
$$w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

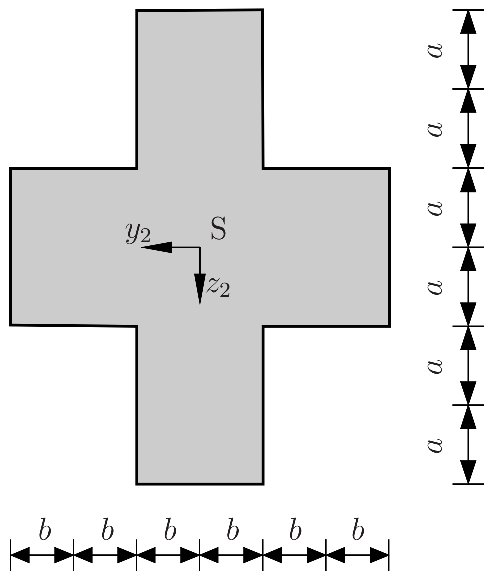
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

d)
In der rechten Skizze ist das Profil des Balkens zu sehen. Das Flächenträgheitsmoment bezüglich des Schwerpunkts S ist mit $I_y = a^3 b\, 116/3$ gegeben. Weiterhin ist die Biegelinie im Bereich $0 \leq x_2 \leq l$ mit

$$w_2(x_2) = \frac{F}{6EI_y}(x_2 - l)^3 + c_1 x_2 + c_2$$

gegeben.



Bestimmen Sie die Normalspannung σ_{xx} in Abhängigkeit von (x_2, z_2) im Bereich $0 \leq x_2 \leq l$. Geben Sie dabei relevante Zwischenergebnisse an. **(1,0 Punkte)**

$$M_y(x_2) = -EI_y w''(x_2) \qquad \sigma_{xx}(x_2, z_2) = \frac{M_y(x_2)}{I_y} z_2$$

$$M_y(x_2) = F(l - x_2) \qquad \sigma_{xx}(x_2, z_2) = \frac{9F(l - x_2)z_2}{116a^3 b}$$

Bestimmen Sie den Betrag und die Koordinaten x_2, z_2 der maximalen Normalspannung σ_{xx} in diesem Abschnitt des Balkens. Geben Sie dabei die relevanten Zwischenschritte an. **(1,5 Punkte)**

Die Spannung ist maximal für $x_2 = 0$ und $z_2 = \pm 3a$.

$$\left|\sigma_{xx}^{max}\right| = \left|\sigma_{xx}(x_2 = 0, z_2 = 3a)\right| = \frac{9Fl}{116a2b}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

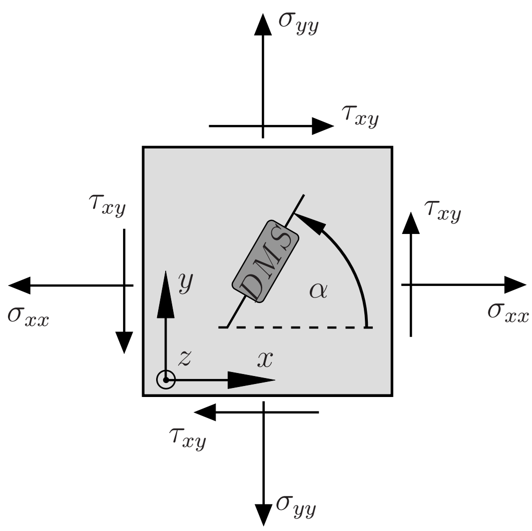
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)
Die nebenstehende Skizze zeigt eine dünne Scheibe, welche durch die Normalspannungen $\sigma_{xx} = 60\,\text{MPa}$, $\sigma_{yy} = 120\,\text{MPa}$ und eine unbekannte Schubspannung τ_{xy} belastet wird. Auf der Scheibe ist ein Dehnungsmessstreifen im Winkel von $\alpha = 60°$ angebracht, welcher die Dehnung $\varepsilon_{DMS} = (1+\sqrt{3})/125$ misst. Das Material der Scheibe weist einen Elastizitätsmodul $E = 10.000\,\text{MPa}$ und eine Querkontraktionszahl $\nu = 1/3$ auf. Das Materialverhalten kann mit einem isotropen, linearen Materialmodell beschrieben werden. Der Spannungs- und Verzerrungszustand in der Scheibe ist homogen, und es kann von einem ebenen Spannungszustand ausgegangen werden.



Berechnen Sie die resultierenden Verzerrungen ε_{xx} und ε_{yy} im x-y-z-Koordinatensystem. **(1,0 Punkte)**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}\right] = 2\cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}\right] = 10^{-2}$$

Bestimmen Sie die Verzerrungen ε_{xy} im x-y-z-Koordinatensystem sowie die unbekannte Schubspannung τ. **(2,0 Punkte)**

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{\sin(2\varphi)}\left[\varepsilon_{\xi\xi} - \frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\cos(2\varphi)\right] = 0.016$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy} = 120\,\text{MPa}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

b)
Zu einem System sei das Verschiebungsfeld im x-y-z-Koordinatensystem mit

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = \frac{u_0}{l^2}\left[(4xy + z^2)\boldsymbol{e}_x + (6x^2 - 2yz)\boldsymbol{e}_y + \frac{z^3}{l}\boldsymbol{e}_z\right]$$

gegeben.

Geben Sie den resultierenden Verzerrungstensor an. **(2,0 Punkte)**

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{x,y,z} = \frac{u_0}{l^2}\begin{bmatrix} 4y & 8x & z \\ 8x & -2z & -y \\ z & -y & 3\frac{z^2}{l} \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Vorname: ______________________

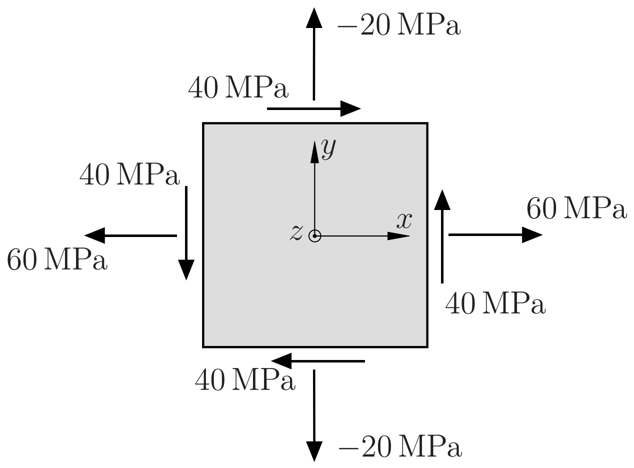
Nachname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

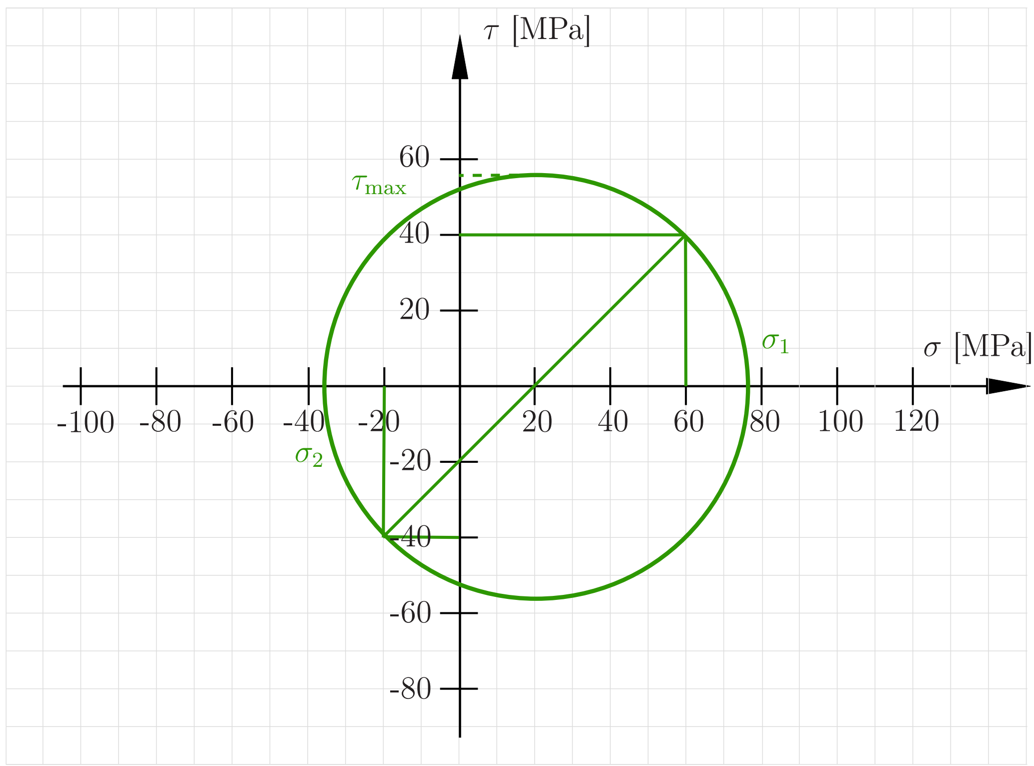
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

c)
Ein dünnes Blech wird, wie in der nachfolgenden Skizze dargestellt, durch die Spannungen in der Ebene belastet.



Skizzieren Sie für die gegebene Belastung den Mohr'schen Spannungskreis. Zeichnen Sie die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sowie die maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ ein. **(2,0 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

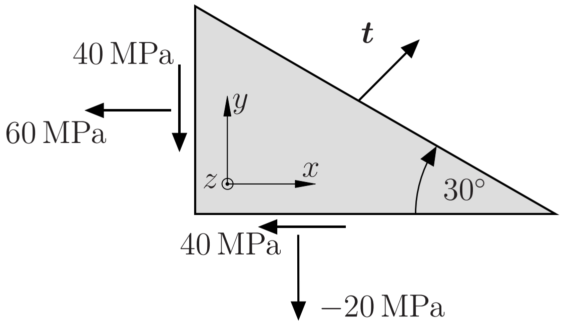
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

d)
Für das dünne Blech aus c) wird im Folgenden ein Schnittbild unter einem Winkel von 30° gezeigt.



Berechnen Sie den resultierenden Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ im x-y-Koordinatensystem. **(1,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{t} = \begin{bmatrix} 64.64\,\text{MPa} \\ 2.68\,\text{MPa} \end{bmatrix}$$

e)
Für ein anderes System wurde der Spannungstensor bezogen auf ein kartesisches x-y-z-Koordinatensystem zu

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \frac{\sigma_0}{l^2} \begin{bmatrix} -6a^2 + 2x^2 + 7az & -8yz & -4xz + 4z^2 \\ -8yz & 6yz & -3z^2 \\ -4xz + 4z^2 & -3z^2 & 3z^2 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

bestimmt. Befindet sich das System im statischen Gleichgewicht, wenn keine Volumenkräfte wirken? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2,0 Punkte)**

Nein, da $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{bmatrix} \neq 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

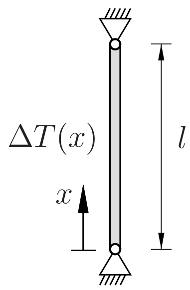
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

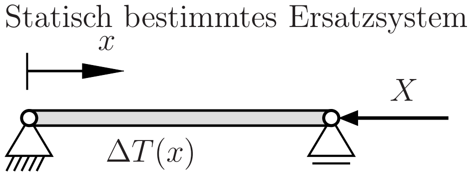
Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

a)
Der nebenstehende, statisch unbestimmt gelagerte Stab (Elastizitätsmodul E, Flächenträgheitsmoment I, Querschnittsfläche A und Wärmeausdehnungskoeffizient α_T) erfährt eine Temperaturänderung $\Delta T(x) = \Delta T_0\, x/l$. Der Stab ist für $\Delta T_0 = 0$ spannungs- und verzerrungsfrei.



Zeichnen Sie ein geeignetes, statisch bestimmtes Ersatzsystem und geben Sie die Kompatibilitätsbedingung an. **(1,0 Punkte)**

Statisch bestimmtes Ersatzsystem:



Kompatibilitätsbedingung: $u(x = l) = 0$

Berechnen Sie die Normalspannung σ_{xx} im Stab, welche sich aufgrund der Temperaturänderung $\Delta T(x)$ ergibt. **(1,0 Punkte)**

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{2} E \alpha_T \Delta T_0$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

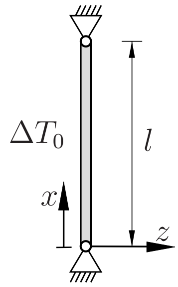
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

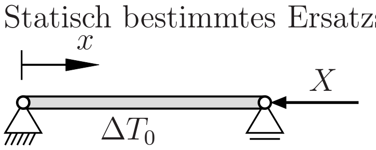
Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

b)
Das System aus a) erfährt nun eine konstante Temperaturänderung $\Delta T(x) = \Delta T_0$.



Berechnen Sie die kritische Temperatur $\Delta T_0 > 0$ bei welcher der Stab ausknickt. Geben Sie dabei die relevanten Gleichungen und Zwischenergebnisse an. **(2,0 Punkte)**

Statisch bestimmtes Ersatzsystem:



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha_T \Delta T_0 = -\frac{X}{EA} + \alpha_T \Delta T_0$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_0^l \varepsilon_{xx} \mathrm{d}x = -\frac{Xl}{EA} + \alpha_T \Delta T_0 l$$

$$u(x = l) = 0 \Rightarrow X = EA\alpha_T \Delta T_0$$

2. Knickfall: $X = F_{krit} = \pi^2 \dfrac{EI}{l^2} \Leftrightarrow \Delta T_0 = \dfrac{\pi^2 I}{A\alpha_T l^2}$

c)
Beschreiben Sie zwei Möglichkeiten wie das System aus b) modifiziert werden kann, um die kritische Temperatur zu vergrößern. Die Länge l und die Querschnittsgeometrie des Stabes sollen dabei nicht verändert werden. **(1,0 Punkte)**

Möglichkeit 1: Ersetzen der Festlager durch feste Einspannungen.
Möglichkeit 2: Ein Material mit einem geringeren Wärmeausdehnungskoeffizienten α_T wählen.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

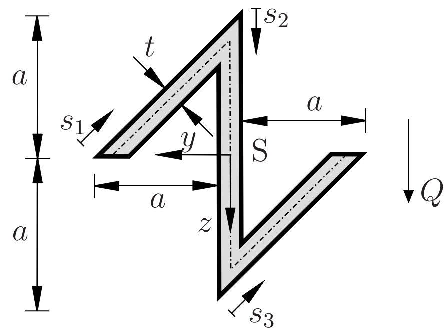
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

d)
In dem rechts dargestellten dünnwandigen Profil ($t \ll a$) ist das Koordinatensystem im Schwerpunkt S gegeben. Die Querkraft Q wirkt in z-Richtung.



Berechnen Sie die statischen Momente $S_y(s_1)$ bezüglich der Koordinate s_1 für den Teilbereich $0 \leq s_1 \leq \sqrt{2}\,a$ und $S_y(s_2)$ bezüglich der Koordinate s_2 für den Teilbereich $0 \leq s_2 \leq 2a$ des Profils. **(1,5 Punkte)**

$$S_y(s_1) = \int_0^{s_1} z(s_1)\mathrm{d}A_1 = \int_0^{s_1} -\frac{\sqrt{2}}{2}s_1 t\mathrm{d}s_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}ts_1^2$$

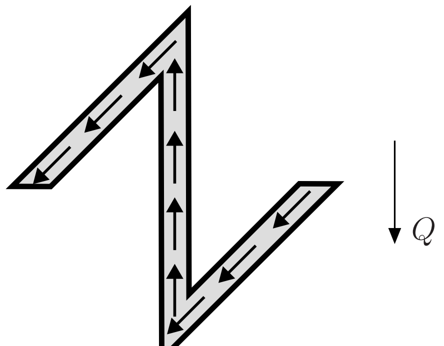
$$S_y(s_2) = S_y(s_1 = \sqrt{2}a) + \int_0^{s_2} z(s_2)\mathrm{d}A_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}ta^2 + \int_0^{s_2} t(a+s_2)\mathrm{d}s_2$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}ta^2 + t(-as_2 + \frac{1}{2}s_2^2)$$

Berechnen Sie die Schubspannung $\tau(s_2)$ im Bereich $0 \leq s_2 \leq 2a$ im Profil. Zeichnen Sie zusätzlich die positive **Richtung** der Schubspannung, für das gesamte Profil, in die nebenstehende Skizze ein. Nehmen Sie dazu an, dass das Flächenträgheitsmoment I_y bekannt ist. **(1,0 Punkte)**

$$\tau(s_2) = \frac{QS_y(s_2)}{I_y t(s_2)} = \frac{Q}{I_y}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a^2 - as_2 + \frac{1}{2}s_2^2\right)$$

Das Integral der Schubspannung über die Querschnittsfläche muss Q ergeben. Daraus folgt die Richtung der Schubspannung.



TU Dortmund

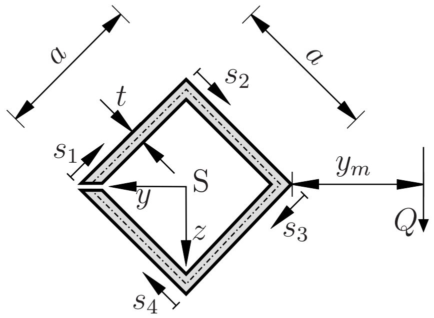
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

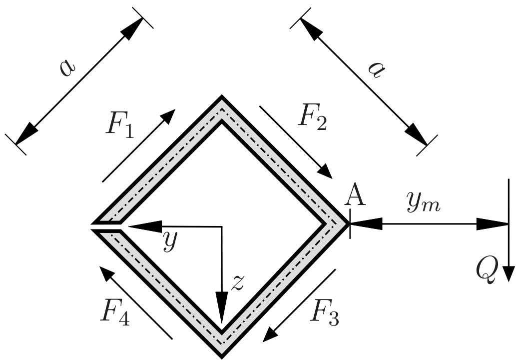
e)
Für das rechts dargestellte, dünnwandige Profil ($t \ll a$) ist das Koordinatensystem im Schwerpunkt S gegeben. Die Querkraft Q wirkt im Schubmittelpunkt in z-Richtung.



Die positiven Schubspannungen sind in s_1, s_2 Richtung gegeben mit:

$$\tau(s_1) = \frac{Q}{a^3 t}\frac{\sqrt{2}}{8} 3 s_1^2 \qquad \tau(s_2) = \frac{Q}{a^3 t}\frac{\sqrt{2}}{8} 3\left(a^2 + 2 a s_2 - s_2^2\right)$$

Berechnen Sie den Abstand y_m des Schubmittelpunktes, gemessen von der rechten Profilecke. Geben Sie dabei relevante Ansätze und Zwischenergebnisse an. **(2,5 Punkte)**



Momentensumme um den Punkt A: $\sum F_i r_i = F_1 a + F_4 a = Q y_m$

Aufgrund von Symmetrie gilt: $F_1 = F_4 \Rightarrow y_m = 2a\dfrac{F_1}{Q}$

$$F_1 = \int_0^a \tau(s_1)\mathrm{d}A_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} Q$$

$$\Rightarrow y_m = \frac{\sqrt{2}}{4} a$$