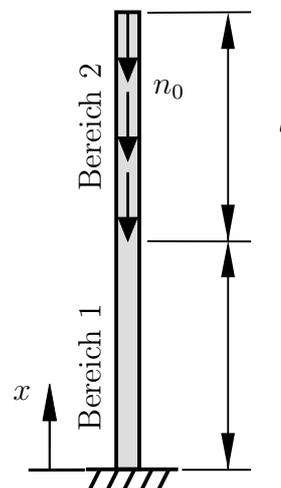


**Aufgabe 1** (Seite 1 von 2)

a)

Der nebenstehend dargestellte Stab (Elastizitätsmodul  $E$ , Querschnittsfläche  $A$ ) wird im Bereich 2 von  $l \leq x \leq 2l$  mit einer konstanten Streckenlast  $n(x) = -n_0$  belastet. Im Bereich 1 von  $0 \leq x \leq l$  ist  $n(x) = 0$ .



Geben Sie die kinematischen und dynamischen Rand- und Übergangsbedingungen zur Bestimmung der Verschiebungsfunktion  $u_1(x)$  im Bereich 1 und  $u_2(x)$  im Bereich 2 an. **(2,0 Punkte)**

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 0, \\ N_2(x = 2l) &= 0, \\ u_1(l) &= u_2(l), \\ N_1(l) &= N_2(l) \end{aligned}$$

Berechnen sie die Verschiebungsfunktionen  $u_1(x)$  im Bereich 1 und  $u_2(x)$  im Bereich 2 unter Angabe wesentlicher Zwischenschritte. **(3,0 Punkte)**

DGL:

$$EA u_1'' = 0, \quad EA u_2'' = -n = n_0$$

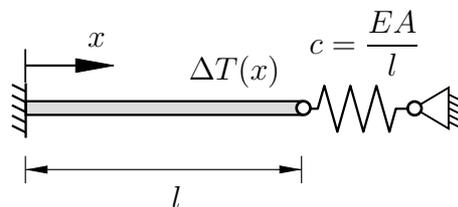
Integration und Einsetzen der Randbedingungen:

$$u_1(x) = -\frac{n_0 l}{EA} x, \quad u_2(x) = \frac{n_0}{2EA} [x^2 - 4lx + l^2]$$

**Aufgabe 1** (Seite 2 von 2)

b)

Das nebenstehend dargestellte System besteht aus einem Stab (Elastizitätsmodul  $E$ , Querschnittsfläche  $A$ , Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha_T$ ) und einer Feder (Federsteifigkeit  $c = EA/l$ ). Die Feder ist im Ausgangszustand entspannt. Das System wird anschließend mit einer Temperaturverteilung



$$\Delta T(x) = \Delta T_0 [lx - x^2]$$

erwärmt.

Geben Sie die kinematischen und dynamischen Randbedingungen zur Lösung der Verschiebungsfunktion  $u(x)$  an. **(1,5 Punkte)**

$$u(0) = 0$$

$$N(l) = -c u(l)$$

Berechnen Sie die vollständige Verschiebungsfunktion  $u(x)$  und lösen Sie dabei alle Anteile so weit wie möglich. Geben Sie wichtige Zwischenschritte an. **(3,5 Punkte)**

$$u(x) = \alpha_T \int_0^x \Delta T(x) dx + B_1 x + B_2$$

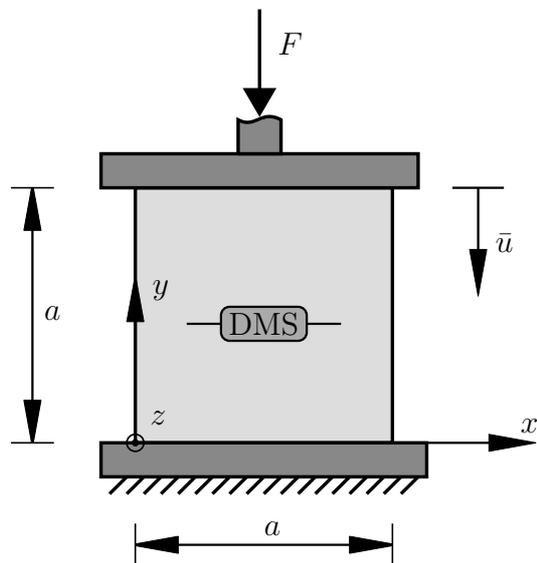
Randbedingungen einsetzen und Integral lösen:

$$u(x) = \alpha_T \Delta T_0 \left[ \frac{1}{2} l x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{l^2}{12} x \right]$$

**Aufgabe 2** (Seite 1 von 4)

a)

Im Folgenden sollen für einen neu entwickelten Werkstoff der Elastizitätsmodul  $E$  sowie die Querkontraktionszahl  $\nu$  zu einem isotropen, linearen Materialmodell ermittelt werden. Dazu wird ein Würfel der Kantenlänge  $a$  wie nebenstehend abgebildet mit der Kraft  $F$  auf Druck belastet. Es wird eine Stauchung von  $\bar{u}$  am Stempel (bei  $y = a$ ) gemessen. Die Kontaktflächen können als reibungsfrei ( $\mu = 0$ ) angenommen werden, so dass ein homogener Spannungs- und Verzerrungszustand anzunehmen ist. Senkrecht zur Belastungsrichtung wird ein Dehnungsmessstreifen (DMS) in Richtung der  $x$ -Achse auf der Oberfläche angebracht. Dieser misst bei der Belastung eine Dehnung von  $\varepsilon_{\text{DMS}}$ . Durch die Isotropie des Werkstoffes und den symmetrischen Aufbau des Experiments kann davon ausgegangen werden, dass  $\sigma_{xx} = \sigma_{zz}$  und  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz}$ .



Ermitteln Sie die Koeffizienten des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$ , welcher im Würfel wirkt, im  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem. **(1,0 Punkte)**

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Verzerrung  $\varepsilon_{yy}$  bezogen auf das  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem. **(0,5 Punkte)**

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\bar{u}}{a}$$

**Aufgabe 2** (Seite 2 von 4)

Bestimmen Sie den Elastizitätsmodul  $E$  sowie die Querkontraktionszahl  $\nu$  aus den Ihnen bekannten Größen. **(1,0 Punkte)**

$$E = \frac{F}{\bar{u} a}$$
$$\nu = \frac{\varepsilon_{\text{DMS}} a}{\bar{u}}$$

b)

In einem dünnen Blech der Dicke  $t$  wurde bezüglich eines  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystems der Spannungszustand

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \bar{\sigma} \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

abhängig von einer äußeren Belastung  $\bar{\sigma}$  durch numerische Simulationen ermittelt. Die Dickenrichtung des Bleches liegt dabei in  $z$ -Richtung. Der Elastizitätsmodul  $E$  sowie die Querkontraktionszahl  $\nu$  des zugrunde liegenden isotrop linear, elastischen Materialmodells sind bekannt. Außerdem hat das Material eine maximal zulässige Vergleichsspannung nach von Mises von  $\sigma_{\text{zul}}$ .

Um welchen Wert  $\Delta t$  verändert sich die Blechdicke  $t$ ? **(1,0 Punkte)**

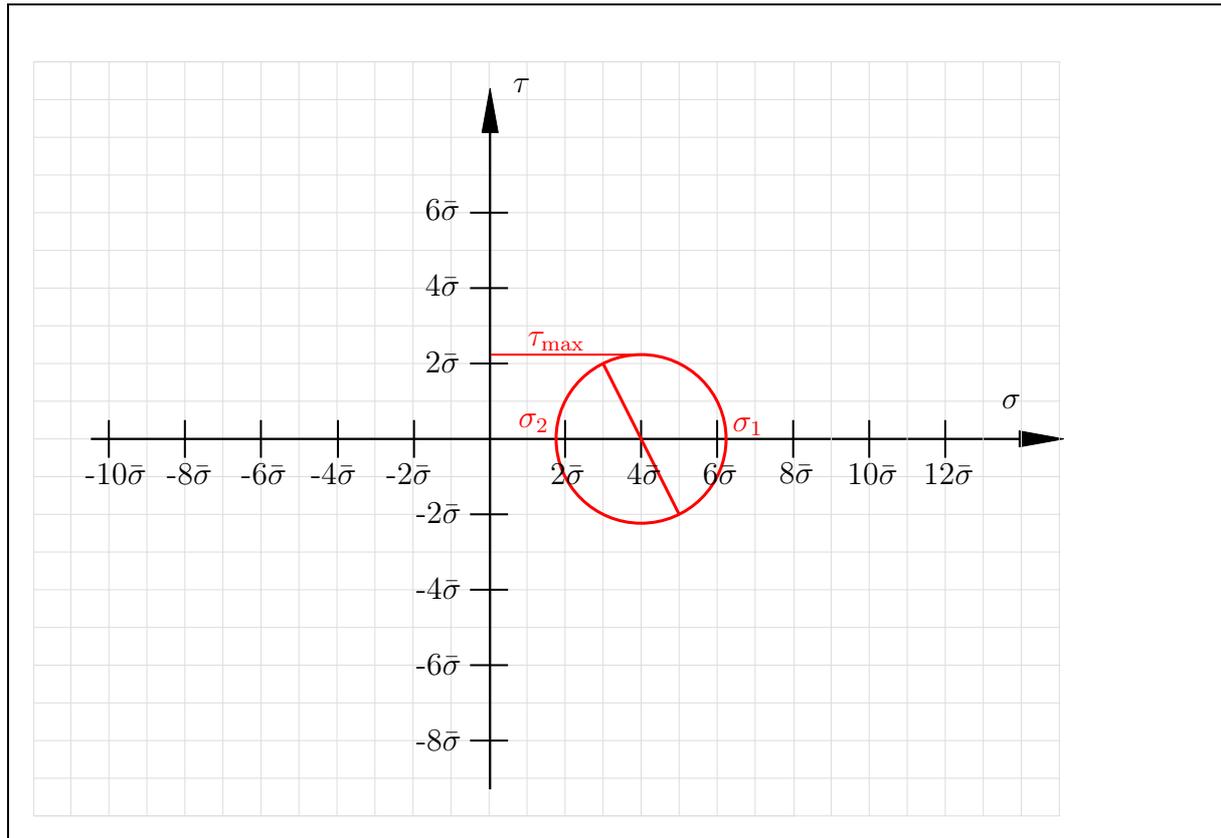
$$\Delta t = -8 \frac{\nu}{E} \bar{\sigma} t$$

Welchen Wert darf die äußere Belastung  $\bar{\sigma}$  maximal haben damit nach der Gestaltänderungshypothese nach von Mises kein Versagen im Material auftritt? **(1,0 Punkte)**

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{\sqrt{31}}$$

**Aufgabe 2** (Seite 3 von 4)

Skizzieren Sie für die gegebene Belastung des Bleches den Mohr'schen Spannungskreis in der  $x$ - $y$ -Ebene. Zeichnen Sie die Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sowie die maximale Schubspannung  $\tau_{\max}$  ein. **(2,5 Punkte)**



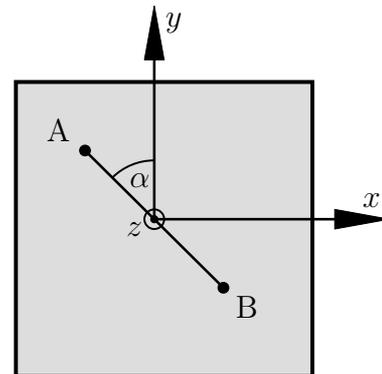
**Aufgabe 2** (Seite 4 von 4)

c)

In einem weiteren System wurde ein lokales Verschiebungsfeld von

$$[\mathbf{u}] = \frac{u_0}{l} \begin{bmatrix} 2x + 4y \\ l + x - y \\ l \end{bmatrix}$$

in dem gegebenen kartesischen  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystem gemessen. Außerdem ist hier die Linie  $\overline{AB}$  mit  $\alpha = 45^\circ$  eingezeichnet.



Geben Sie den resultierenden Verzerrungstensor bezüglich des  $x$ - $y$ - $z$ -Koordinatensystems an. **(1,5 Punkte)**

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{u_0}{l} \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die relative Längenänderung  $\varepsilon_{AB}$  der Linie  $\overline{AB}$  basierend auf dem Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . **(1,5 Punkte)**

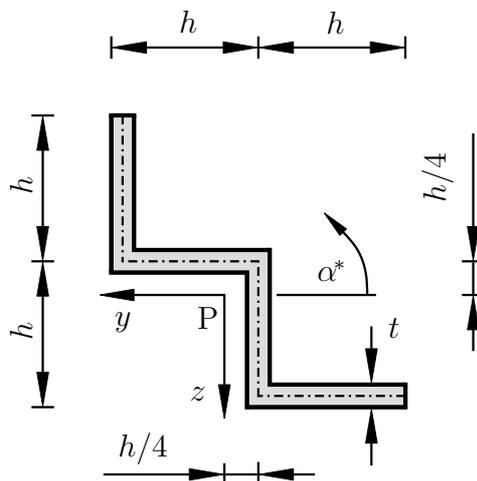
$$\varepsilon_{AB} = -2 \frac{u_0}{l}$$

**Aufgabe 3** (Seite 1 von 3)

a)

Der nebenstehende, **dünnwandige** Querschnitt (Dicke  $t$ ) eines Balkens ist gegeben. Das Schwerpunktkoordinatensystem (Schwerpunkt P) wurde bereits berechnet und ist der Zeichnung zu entnehmen.

Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment  $I_y$  bezüglich des Schwerpunktkoordinatensystems. Fassen Sie die Terme **nicht** zusammen.

**(2,0 Punkte)**

$$I_y = \frac{t h^3}{6} + 2 \frac{9 t h^3}{16} + 2 \frac{t h^3}{16}$$

$$= \frac{1}{6} t h^3 + \frac{9}{8} t h^3 + \frac{1}{8} t h^3$$

Um welche(n) Winkel  $\alpha \in [-90^\circ, 90^\circ]$  muss der Querschnitt um das Schwerpunktkoordinatensystem rotiert werden, damit das Deviationsmoment  $I_{yz}$  zu Null verschwindet. Begründen Sie Ihre Antwort.

**Tipp:** Eine Berechnung ist nicht notwendig.

**(1,0 Punkte)**

$$\alpha = \pm 45^\circ$$

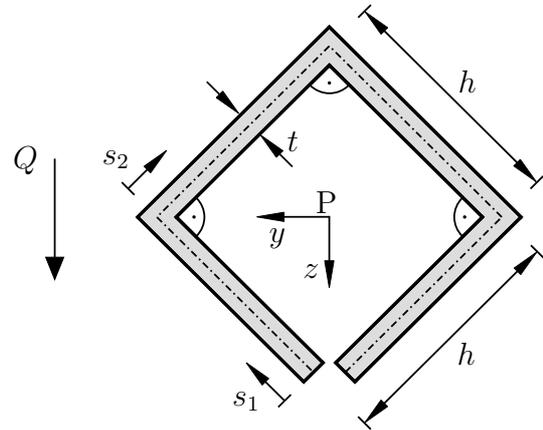
Begründung: Bei der Drehung um die angegebenen Winkel ist der Querschnitt symmetrisch zu entweder der y-Achse oder der z-Achse des Schwerpunktkoordinatensystems. Damit kürzen sich Steiner-Anteile des Deviationsmoments heraus. Eigenanteile zum Deviationsmoment der rechteckigen Abschnitte gibt es ebenfalls nicht.

**Aufgabe 3** (Seite 2 von 3)

b)

Es soll nun ein neuer, **dünnwandiger** Balkenquerschnitt mit konstanter Dicke  $t$  und Kantenlänge  $h$  untersucht werden ( $t \ll h$ ). Das Schwerpunktkoordinatensystem (Schwerpunkt P) ist gegeben. Die  $z$ -Koordinate als Funktion der Koordinate  $s_1$  ist bereits gegeben:

$$z(s_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} [h - s_1]$$



Bestimmen Sie den Verlauf des statischen Moments entlang der Koordinaten  $s_1$  und  $s_2$ . **(2,0 Punkte)**

$$S_1(s_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} t \left[ h s_1 - \frac{s_1^2}{2} \right]$$

$$S_2(s_2) = \frac{\sqrt{2}}{4} t [h^2 - s_2^2]$$

Identifizieren und nennen Sie die Stelle(n) des Profils, welche die betragsmäßig maximale Schubspannung aufweist bzw. aufweisen. Nennen Sie außerdem die Stelle(n), an der bzw. an denen die Schubspannung zu Null verschwindet (ausgenommen freie Enden). **(1,5 Punkte)**

Maximale Schubspannung:

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} h \quad z_1 = 0$$

$$y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} h \quad z_2 = 0$$

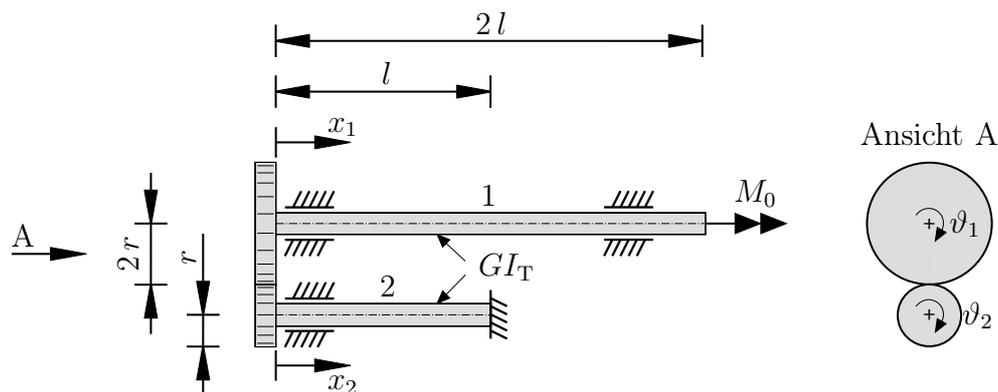
Keine Schubspannung:

$$y_3 = 0 \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} h$$

**Aufgabe 3** (Seite 3 von 3)

c)

Das nachfolgend dargestellte System besteht aus zwei Wellen, die über ein als starr anzunehmendes Zahnradpaar verbunden sind. Die untere Welle (2) ist an der Stelle  $x_2 = l$  fest eingespannt. An der oberen Welle (1) wird an der Stelle  $x_1 = 2l$  das Moment  $M_0$  eingeleitet.



Die Torsionsmomentenverläufe wurden bereits bestimmt:

$$M_{T,1}(x_1) = M_0, \quad M_{T,2}(x_2) = \frac{1}{2} M_0$$

Geben Sie die kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen des Systems an. Beachten Sie den angegebenen positiven Drehsinn der Wellen. **(1,0 Punkte)**

$$\begin{aligned} \vartheta_2(x_2 = l) &= 0 \\ 2r \vartheta_1(x_1 = 0) &= -r \vartheta_2(x_2 = 0) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Verlauf der Umfangswinkel  $\vartheta_1(x_1)$  und  $\vartheta_2(x_2)$  der beiden Bereiche in Abhängigkeit von  $x_1$  bzw.  $x_2$ ,  $M_0$ ,  $l$ , und  $GI_T$ . **(2,0 Punkte)**

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x_1) &= \frac{M_0}{GI_T} \left[ x_1 + \frac{l}{4} \right] \\ \vartheta_2(x_2) &= \frac{M_0}{2GI_T} [x_2 - l] \end{aligned}$$

Geben Sie das Moment  $M_0^*$  abhängig von  $l$  und  $GI_T$  an, welches zu einer Verdrehung um  $\pi/4$  an der Einleitungsstelle ( $x_1 = 2l$ ) führt. **(0,5 Punkte)**

$$M_0^* = \frac{\pi GI_T}{9l}$$