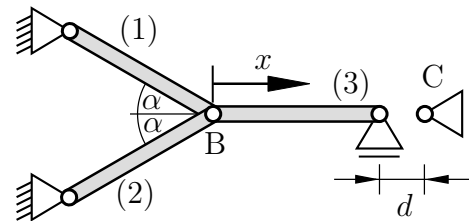


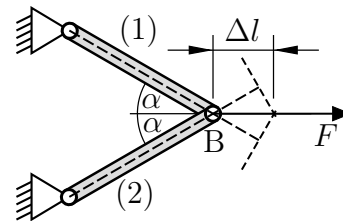
Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Das dargestellte Fachwerk besteht aus drei identischen Stäben (1), (2) und (3) (Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A , Länge l). Das Lager C wurde falsch positioniert, sodass der Einbau von Stab (3) nicht möglich ist und ein Abstand d zwischen Stabende und Lager bleibt.



a)

Betrachten Sie zunächst nur den Stabzweischlag (1) und (2). Leiten Sie aus dem angedeuteten Verschiebungsplan die Längenänderungen $\Delta l_1(\Delta l)$ von Stab 1 und $\Delta l_2(\Delta l)$ von Stab 2 in Abhängigkeit der Gesamtlängung Δl her.

**(0,5 Punkte)**

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l \cos \alpha$$

Berechnen Sie für eine gegebene Kraft F , die wie oben dargestellt am Punkt B angreift, die resultierende Längenänderung Δl am Gelenk B.

(2,0 Punkte)

$$\Delta L = \frac{F l}{2 \cos^2(\alpha) EA}$$

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

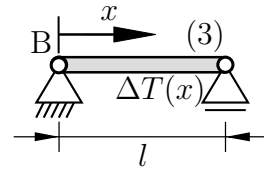
b)

Betrachten Sie nun den Stab (3) in dem nebenstehenden Teil-Modell. Der Stab weist einen Wärmeausdehnungskoeffizienten α_T auf und wird mit einer Temperaturverteilung

$$\Delta T(x) = \Delta T_0 [1 - \cos(2\pi x/l)]$$

erwärmt.

Geben Sie die Randbedingungen zur Lösung der Verschiebungsfunktion $u(x)$ an.
(1,0 Punkte)



$$u(x=0) = 0$$

$$N(x=l) = 0$$

Berechnen Sie die vollständige Verschiebungsfunktion $u(x)$ und lösen Sie dabei alle Anteile so weit wie möglich. Geben Sie wichtige Zwischenschritte an.
(3,0 Punkte)

$$EA u''(x) = 0 + EA \alpha_T \Delta T(x)'$$

$$u'(x) = \alpha_T \Delta T(x) + \mathcal{B}_1$$

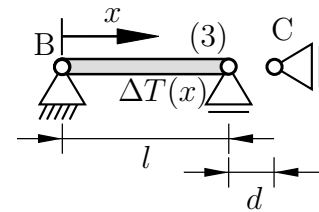
$$N(x) = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow 0 = \alpha_T \Delta T(x=0) + \mathcal{B}_1 \Rightarrow \mathcal{B}_1 = 0$$

$$u(x) = \alpha_T \Delta T_0 \left[x - \sin(2\pi x/l) \frac{l}{2\pi} \right] + \mathcal{B}_2$$

$$u(x=0) = 0 \Rightarrow \mathcal{B}_2 = 0$$

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

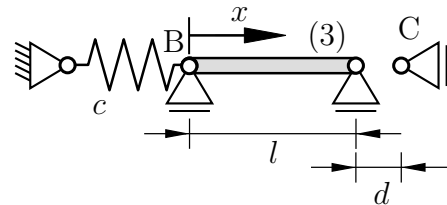
Wie groß muss ΔT_0 gewählt werden, damit der Stab im heißen Zustand im Lager C montiert werden kann, welches wie nebenstehend dargestellt im Abstand d angebracht ist?

**(1,0 Punkte)**

$$\Delta T_0 = \frac{d}{\alpha_T l}$$

c)

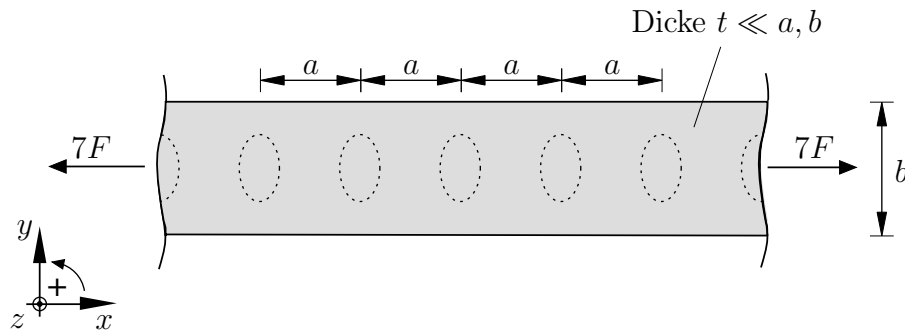
Betrachten Sie nun das nebenstehende spannungsfreie System in dem eine Feder der Steifigkeit c mit dem Stab (3) verbunden ist. Nehmen Sie an, dass der Stab nun im Lager C montiert wurde und keine Temperaturdehnungen mehr vorhanden sind. Berechnen Sie aus der Gesamtlängenänderung d die resultierende Spannung σ im Stab (3).

**(2,5 Punkte)**

$$\sigma = \frac{E c d}{c l + E A}$$

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

In der Medizin(-technik) kommen bei Bedarf Verbandsmaterialien mit sogenannten Indikatoren (aufgedruckte Ovale) zum Einsatz. Deren Form ist abhängig vom Belastungszustand. Das Verbandsmaterial sei isotrop und linear elastisch.



a)

In der Fertigung läuft der Verband zunächst über eine ebene Fläche und wird dabei wie dargestellt mit einer Kraft von $7F$ belastet. Ermitteln Sie die Koeffizienten des im Material resultierenden Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$, bzgl. des vorgegebenen (x, y, z) -Koordinatensystems. **(1,0 Punkte)**

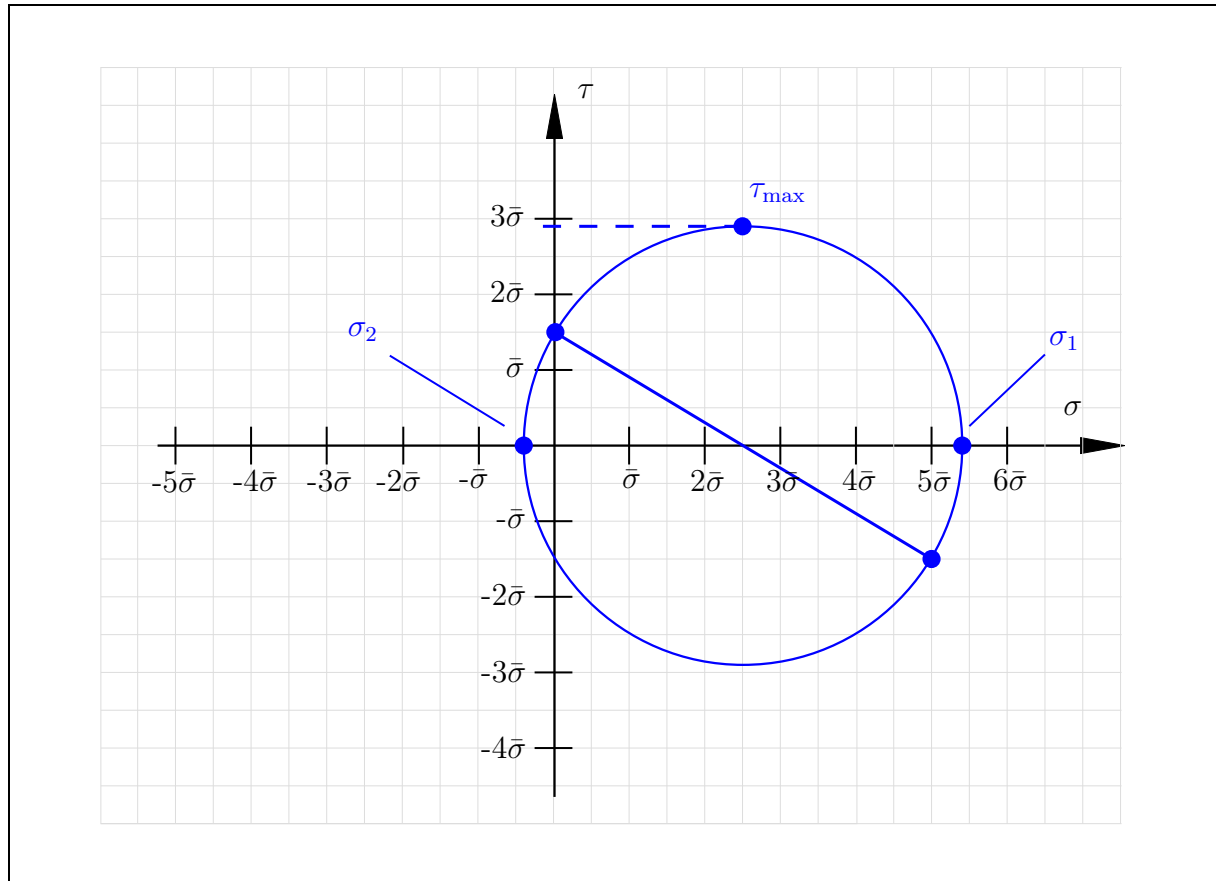
$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \frac{7F}{bt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

In einem weiteren Fertigungsschritt liege der Spannungszustand

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 5.0 \bar{\sigma} & -1.5 \bar{\sigma} & 0 \\ -1.5 \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vor. Konstruieren Sie für die gegebene Belastung des Verbandmaterials den Mohr'schen Spannungskreis in der x - y -Ebene. Nutzen Sie dazu das Kästchen auf der nächsten Seite. Zeichnen Sie die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 , sowie die maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ ein. **(2,0 Punkte)**

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Beschreiben Sie kurz und anschaulich, welche Art von Belastung für diesen Spannungszustand verantwortlich sein könnte bzw. wie sich das Verbandsmaterial in diesem Fertigungsschritt verformen würde. Nutzen Sie die Abbildung auf Seite 1 als Hilfestellung.
(1,5 Punkte)

Zug in x -Richtung, Schub in negative Richtung

⇒ Es wird am rechten Rand nach „rechts unten“ gezogen, z.B. durch eine diagonal versetzte Walze.

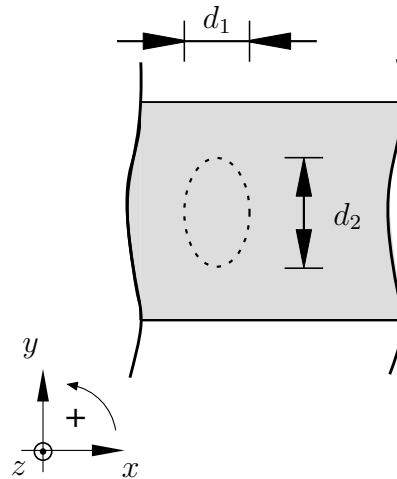
Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

c)

Vereinfachend sei angenommen, der medizinisch optimale Spannungszustand im Verband (E-Modul E , Querkontraktionszahl ν) sei zu

$$[\sigma_{\text{opt}}] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ermittelt worden ($\sigma_0 = \text{const.}$). Die in der Fertigung aufzudruckenden Ovale sollen nun so konzipiert werden, dass sie im Spannungszustand σ_{opt} zu Kreisen verformt werden.



Der Verband wird im spannungsfreien Zustand bedruckt. Bestimmen Sie den für die Bedruckung notwendigen Durchmesser d_2 in Abhängigkeit des Durchmessers d_1 . Geben Sie wichtige Zwischenergebnisse an. **(2,5 Punkte)**

Zu erfüllende Bedingung:

$$d_1 [1 + \varepsilon_{xx}] \stackrel{!}{=} d_2 [1 + \varepsilon_{yy}]$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_0}{E}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu \sigma_0}{E}$$

$$d_2(d_1) = \frac{E + \sigma_0}{E - \nu \sigma_0} d_1$$

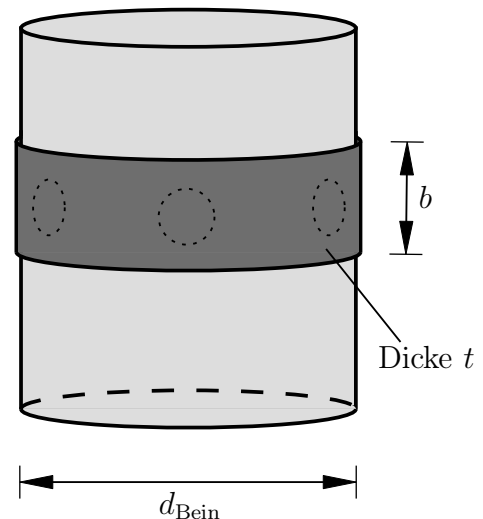
Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

Bestimmen Sie für den obigen Spannungszustand σ_{opt} die Dehnung ε_{45° , die die Ovale in einer 45° -Diagonale (Winkelhalbierende zwischen x - und y -Achse) erfahren. **(1,0 Punkte)**

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{2} \sigma_0 \frac{1 - \nu}{E}$$

d)

Der Verband sei nun wie dargestellt um ein Bein gewickelt. Das Bein wird hierbei vereinfachend als Zylinder mit Durchmesser d_{Bein} angenommen. Die Spannung im Verband in Umfangsrichtung betrage überall σ_0 .



Bestimmen Sie den Druck p_{Bein} , welcher durch den Verband in radiale Richtung auf das Bein aufgebracht wird. **(2,0 Punkte)**

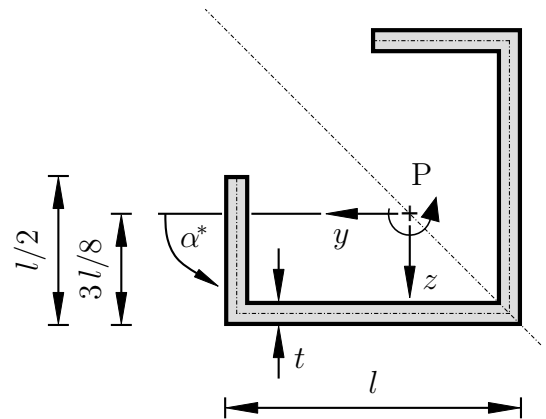
$$p_{\text{Bein}} = \frac{2 \sigma_0 t}{d_{\text{Bein}}}$$

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

a)

Der nebenstehende, **dünnwandige** Querschnitt (Dicke t) eines Balkens ist gegeben. Das Schwerpunktkoordinatensystem (Schwerpunkt P) wurde bereits berechnet und ist der Zeichnung zu entnehmen. Die Symmetrieachse ist zusätzlich eingezeichnet.

Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment I_y bezüglich des Schwerpunktkoordinatensystems. Fassen Sie die Terme **nicht** zusammen.

**(2,0 Punkte)**

$$I_y = \frac{t\ell^3}{96} + \frac{t\ell^3}{12} + \frac{\ell^3 t}{128} + 25 \frac{\ell^3 t}{128} + 9 \frac{\ell^3 t}{64} + \frac{\ell^3 t}{64}$$

Nennen Sie den kleinsten Winkel (in positiver Koordinatenrichtung) α^* , um den der Querschnitt rotiert werden muss, sodass das Deviationsmoment zu Null verschwindet.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Tipp: Eine Berechnung ist nicht notwendig.

(1,0 Punkte)

$$\alpha^* = 45^\circ$$

Begründung:

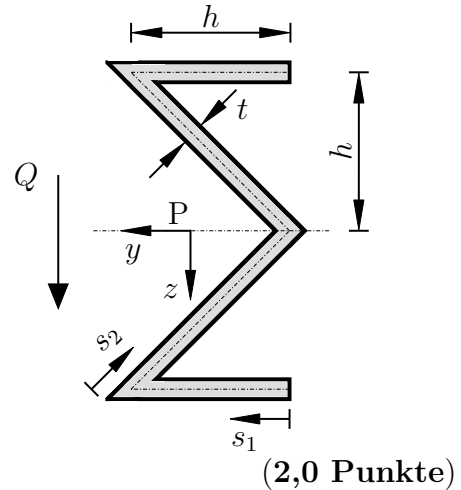
Das Profil ist für diesen Winkel symmetrisch zur y-Achse, wodurch das Deviationsmoment zu Null verschwindet.

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

b)

Es soll nun ein neuer, **dünnwandiger** Balkenquerschnitt mit konstanter Dicke t und Kantenlänge h untersucht werden ($t \ll h$). Das Schwerpunktkoordinatensystem (Schwerpunkt P) sowie die Symmetrieachse sind gegeben.

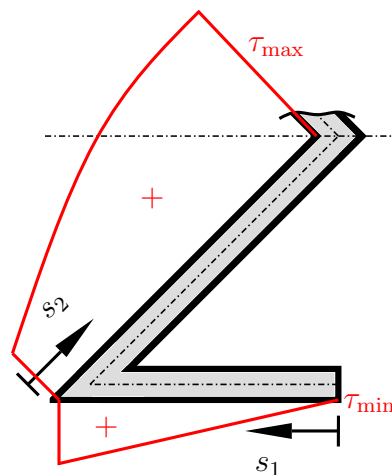
Bestimmen Sie den Verlauf des statischen Moments entlang der Koordinaten s_1 und s_2 .



$$S_1(s_1) = h t s_1$$

$$S_2(s_2) = h^2 t + t h s_2 - \frac{\sqrt{2}}{4} t s_2^2$$

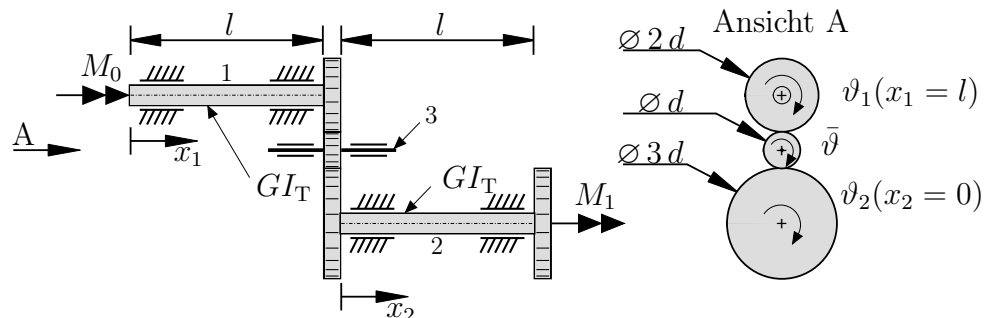
Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf der Schubspannungsfunktion an das Profil. Markieren Sie Stellen maximaler und minimaler Schubspannung. (1,5 Punkte)



Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

c)

Das dargestellte System soll die Übersetzung eines Drehmoments ermöglichen. Die Drehrichtung soll dabei erhalten bleiben, weshalb die obere Welle (1) über insgesamt drei Zahnräder mit der unteren Welle (2) verbunden ist. Die Achse (3) rotiert frei und nimmt kein Drehmoment auf. An der oberen Welle (1) wird das Moment M_0 eingeleitet. An der unteren Welle liegt das Moment M_1 an.



Die Torsionsmomentenverläufe für statisches Gleichgewicht wurden bereits bestimmt:

$$M_{T,1}(x_1) = -M_0, \quad M_{T,2}(x_2) = M_1 = -\frac{3}{2} M_0.$$

Geben Sie die kinematischen Übergangsbedingungen des Systems an. Beachten Sie den angegebenen positiven Drehsinn der Wellen über ϑ_1 , ϑ_2 und $\bar{\vartheta}$. **(1,0 Punkte)**

$$\bar{\vartheta} = -2 \vartheta_1(x_1 = \ell) \quad \vartheta_2(x_2 = 0) = -\frac{1}{3} \bar{\vartheta}$$

Bestimmen Sie für das belastete System den Verlauf der Drehwinkel $\vartheta_1(x_1)$ und $\vartheta_2(x_2)$ in Abhängigkeit von x_1 bzw. x_2 , M_0 , l , und GI_T . Nehmen Sie dazu an, dass an der Ausleitungsstelle $x_2 = l$ eine Verdrehung von $\vartheta_2(x_2 = l) = \pi/4$ gemessen wurde. Die Drehwinkel im unbelasteten Zustand sind mit Null anzunehmen. **(2,0 Punkte)**

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x_1) &= -\frac{M_0}{GI_T} x_1 + C_1 \\ \vartheta_2(x_2) &= -\frac{3}{2} \frac{M_0}{GI_T} x_2 - \frac{2}{3} \frac{M_0 \ell}{GI_T} + \frac{2}{3} C_1 \\ \text{mit } C_1 &= \frac{3}{2} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{13}{6} \frac{M_0 \ell}{GI_T} \right] \end{aligned}$$

Geben Sie an, wie weit sich die Stelle der Einleitung $\vartheta_1(x_1 = 0)$ verdreht. **(0,5 Punkte)**

$$\vartheta_1^*(x_1 = 0) = \frac{3}{2} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{13}{6} \frac{M_0 \ell}{GI_T} \right]$$