TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

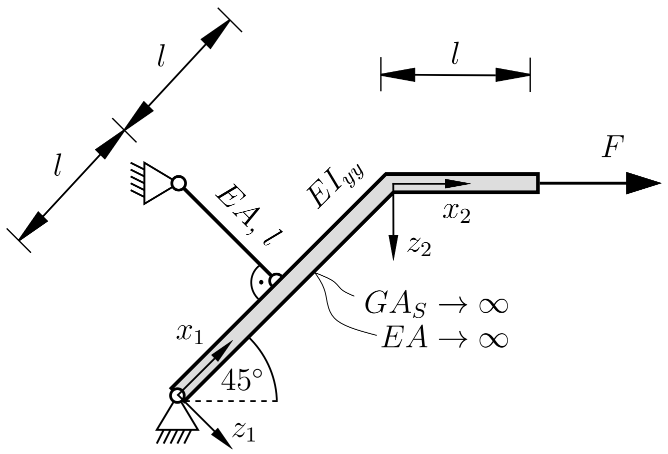
Vorname: ____________________

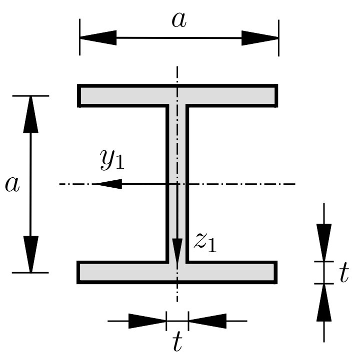
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Hinweis:
Die nachfolgende Aufgabe ist eine Freitextaufgabe. Ausschließlich für diese Aufgabe wird der gesamte Rechenweg Ihrer Lösung bewertet. Für die jeweiligen Teilaufgaben stehen Ihnen die nachfolgenden Lösungskästchen zur Verfügung. Tragen Sie alle Ihre Rechenschritte in die Kästchen ein.

Aufgabe 1





Unter der Annahme $t \ll a$ gelten für die Querschnittsfläche A und das Flächenträgheitsmoment I_{yy} des Profils

$$A = 3\,a\,t, \qquad I_{yy} = \frac{7\,t\,a^3}{12}.$$

Für die Bezeichnung der Bereiche gilt:
Bereich I: $0 \leq x_1 \leq l$ Bereich II: $l \leq x_1 \leq 2\,l$ Bereich III: $0 \leq x_2 \leq l$

a)
Bestimmen Sie im Bereich II des Balkens die betragsmäßig maximale Normalspannung σ^* und die Stelle (x_1^*, z_1^*), an der diese vorliegt. **(3,5 Punkte)**

Hinweis: An der Stelle x_1^* liegt ebenfalls das betragsmäßig maximale Biegemoment des Bereichs vor.

b)
Welche der geometrischen Größen $(l,\ a,\ t)$ hat den größten Einfluss auf die Normalspannung im Bereich II des Balkens? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1,0 Punkte)**

c)
Berechnen Sie die Biegelinie in Bereich I. Verwenden Sie die allgemeinen Bezeichnungen für die Querschnittsfläche A und das Flächenträgheitsmoment I_{yy}. **(5,5 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 a)
Freischnitt in Bereich II:
$Q^{\mathrm{II}}(x_1) = N^{\mathrm{II}}(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,F$
$M_y^{\mathrm{II}} x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,F\,[2\,l - x_1]$

Normalspannungsfunktion:
$\sigma_{xx} = \frac{N^{\mathrm{II}}(x_1)}{A} + \frac{M_y^{\mathrm{II}}(x_1)}{I_y}\,z_1 = \frac{\sqrt{2}\,F}{6\,a\,t} - \frac{6\,\sqrt{2}\,F}{7\,t\,a^3}\,[2\,l - x_1]\,z_1$

Der Momentenverlauf $M_y^{\mathrm{II}}(x_1)$ ist linear in x_1, sodass Extrema jeweils am Rand des Definitionsbereichs (Bereich II: $l \leq x_1 \leq 2\,l$) auftreten. Durch Auswerten der Ränder erhalten wir $|M_y^{\mathrm{II}}(l)| = \frac{\sqrt{2}}{2}\,F\,l$ und $|M_y^{\mathrm{II}}(2\,l)| = 0$, sodass $x_1^* = l$.
Zwischenergebnis:
$\sigma_{xx}(x_1^*, z_1) = \frac{\sqrt{2}\,F}{6\,a\,t} - \frac{6\,\sqrt{2}\,F\,l}{7\,t\,a^3}\,z_1$

Extrema des zweiten Terms treten an den Rändern des Definitionsbereichs (äußere Kanten des Profils in der z_1-Koordinate) auf. Da desweiteren ein positiver Term überlagert wird und das Profil symmetrisch im y_1-z_1-Koordinatensystem ist, liegt die maximale Spannung an der Stelle $z_1^* = -\frac{a}{2}$ vor. Zugehörige Spannung:
$\sigma_{xx}(x_1^*, z_1^*) = \sqrt{2}\,F\,[\frac{1}{6\,a\,t} + \frac{3\,l}{7\,t\,a^2}]$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 a)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 b)
Nur die Größe a geht teils quadratisch in den Term aus der Spannungsfunktion in Aufgabenteil a) ein. Die anderen Größen gehen lediglich linear in die Funktion ein, wodurch die Größe a den größten Einfluss auf die Normalspannung hat.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 c)
Statisch bestimmtes System $\rightarrow$ Stabkraft in der Pendelstütze: $S = \sqrt{2}\,F$

Verschiebung des Stabendes (bzw. des Verbindungspunktes mit dem Balken) in axiale Stabrichtung: $u^{\mathrm{S}} = \varepsilon^{\mathrm{S}}\,l = \frac{S\,l}{EA} = \frac{\sqrt{2}\,F\,l}{EA}$

Momentenverlauf in Bereich I: $M_y^{\mathrm{I}}(x_1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,F\,x_1$

Biegelinie:
$EI_y\,w_{\mathrm{I}}''(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,F\,x_1 = -M_y^{\mathrm{I}}(x_1)$
$EI_y\,w_{\mathrm{I}}'(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{4}\,F\,x_1^2 + C_1$
$EI_y\,w_{\mathrm{I}}(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{12}\,F\,x_1^3 + C_1\,x_1 + C_2$

Randbedingungen:
$w_{\mathrm{I}}(x_1 = 0) = 0 \qquad w_{\mathrm{I}}(x_1 = l) = +u^{\mathrm{S}} = \frac{\sqrt{2}\,F\,l}{EA}$ (positive Verschiebung u^{S} zeigt in positive z_1-Richtung)
$\Rightarrow C_2 = 0 \qquad C_1 = \sqrt{2}\,F\,[\frac{EI_y}{EA} - \frac{l^2}{12}]$

Ergebnis:
$w_{\mathrm{I}}(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{12}\,\frac{F\,x_1^3}{EI_y} + \sqrt{2}\,\frac{F\,x_1}{EI_y}\,[\frac{EI_y}{EA} - \frac{l^2}{12}]$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 c)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

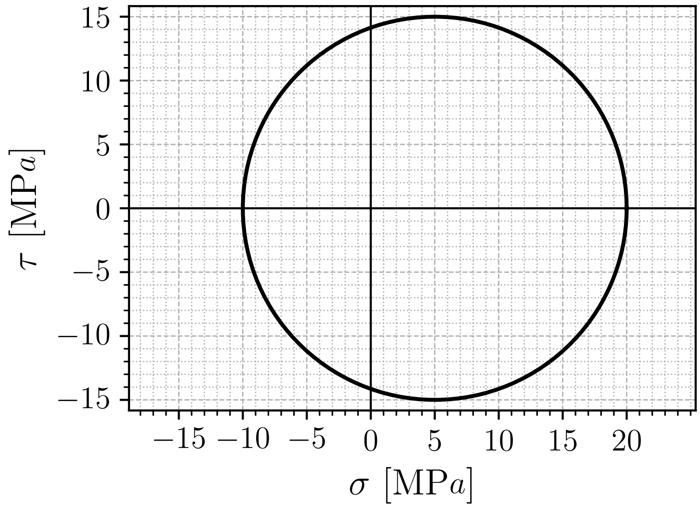
Vorname: ____________________

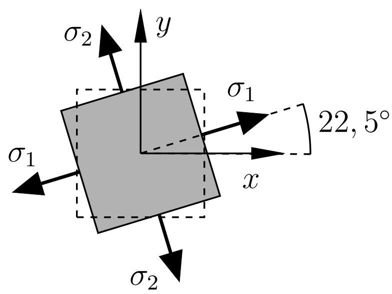
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

a)
Für ein flaches Bauteil ist der Spannungszustand in einem Punkt in Form des Mohr'schen Spannungskreises gegeben.





Lesen Sie die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 sowie die maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ ab. **(1,0 Punkte)**

$\sigma_1 = 20\text{MPa}$ $\sigma_2 = -10\text{MPa}$ $\tau_{\max} = 15\text{MPa}$

Geben Sie den zugehörigen Spannungstensor in einem um 22,5° gedrehten $x - y$ Koordinatensystem (siehe Abbildung) auf ein Megapascal [MPa] genau an. **(1,5 Punkte)**

Drehung um negativen Winkel im physikalischen Raum ⇒ Drehung um zweifachen positiven Winkel im Mohr'schen Kreis. Ablesen führt zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 16 & 11 \\ 11 & -6 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

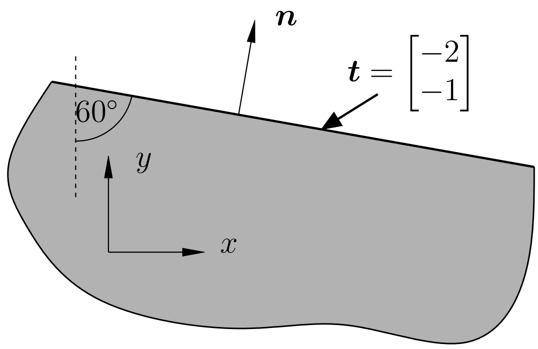
Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

Bewerten Sie den obigen Spannungszustand mit Begründung gemäß der Gestaltänderungshypothese für eine kritische Spannung von $\sigma_{\mathrm{krit}} = 30$ MPa.

(**1,0 Punkte**)

$\sigma_{\mathrm{vM}} = 26,46\mathrm{MPa} < \sigma_{\mathrm{krit}}$
Das Material kann dem gegebenen Spannungszustand nach der Gestaltänderungshypothese standhalten.

b)
Auf einem flachen Bauteil wirkt der Traktionsvektor $\boldsymbol{t}$. Geben Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Spannungskomponenten von $\boldsymbol{\sigma}$ am Angriffspunkt von $\boldsymbol{t}$ an.



(**1,5 Punkte**)

$$\sigma_{xx}\,\frac{1}{2} + \sigma_{xy}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = -2\,\mathrm{MPa}$$
$$\sigma_{yx}\,\frac{1}{2} + \sigma_{yy}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = -1\,\mathrm{MPa}$$

Lassen sich alle Komponenten des Spannungstensors eindeutig berechnen? Begründen Sie ihre Antwort.

(**0,5 Punkte**)

Es fehlen zwei Gleichungen zur Bestimmung aller Spannungskomponenten. Der Spannungszustand hängt somit auch von der Lagerung und dem Materialverhalten ab.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

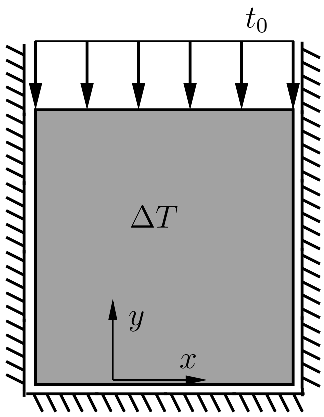
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

c)
Eine quadratische elastische Scheibe (Materialparameter E, ν und α_T) wird durch eine homogene Temperaturdifferenz ΔT erwärmt und durch t_0 belastet. Die Lagerung ist reibungsfrei und in Dickenrichtung (senkrecht zur $x-y$ Ebene) kann sich die Scheibe frei ausdehnen.



Berechnen Sie alle dreidimensionalen Spannungs- und Dehnungskomponenten in der Scheibe. **(3,5 Punkte)**

$\sigma_{yy} = -t_0$, $\sigma_{zz} = 0$ (freie Ausdehnung), $\varepsilon_{xx} = 0$, alle Scherkomponenten von Spannung und Dehnung sind null (reibungsfrei, Normalbelastung)

$$\sigma_{xx} = -E\,\alpha_\mathrm{T}\,\Delta T - \nu\,t_0$$
$$\varepsilon_{yy} = -\frac{t_0}{E} + \frac{\nu^2}{E}\,t_0 + [1+\nu]\,\alpha_\mathrm{T}\,\Delta T$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\nu}{E}\,t_0 + \frac{\nu^2}{E}\,t_0 + [1+\nu]\,\alpha_\mathrm{T}\,\Delta T$$

d)

Ein inhomogener ebener Spannungszustand ist gegeben mit

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 2\,A\,x^2 & -4\,A\,x\,y - 3\,B\,x^2 \\ -4\,A\,x\,y - 3\,B\,x^2 & 2\,A\,y^2 + 6\,B\,x\,y - C\,y \end{bmatrix}$$

mit positiven Parametern A, B und C. Berechnen Sie die Volumenkraft $\boldsymbol{b}$, die notwendig ist, damit Gleichgewicht herrscht. **(1,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ C \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

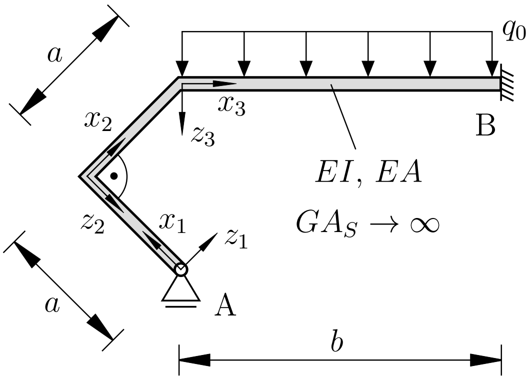
Vorname: ________________

Nachname: ________________

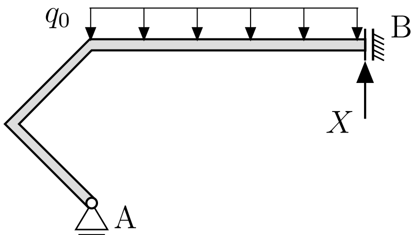
Matr.-Nr.: ________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

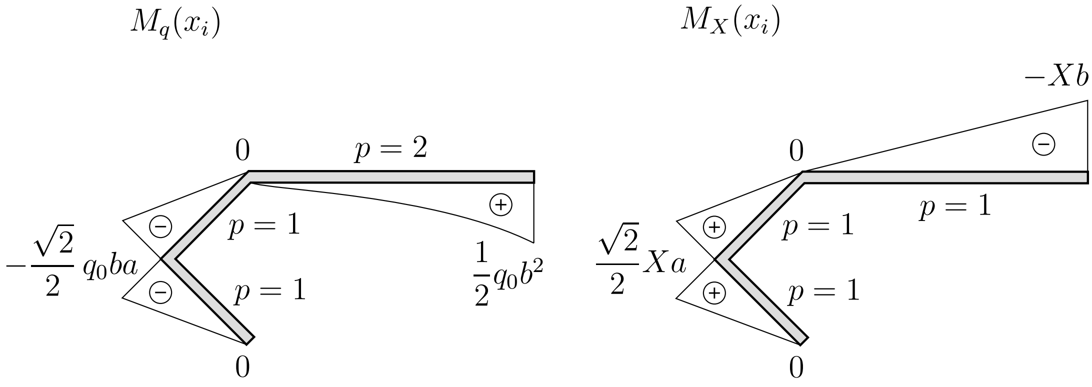
Das nebenstehende Rahmensystem ist statisch unbestimmt.



a)
Skizzieren Sie das statisch bestimmte Ersatzsystem, welches sich ergibt, wenn die feste Einspannung in B durch eine Schiebehülse sowie eine **vertikale** Kraft X ersetzt wird. **(1,0 Punkte)**



Zeichnen Sie die Biegemomentenverläufe $M_q(X = 0)$ und $M_X(q_0 = 0)$ des statisch bestimmten Ersatzsystems. Geben Sie charakteristische Werte und die jeweiligen Polynomgrade p der Funktionen mit an. **(2,0 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

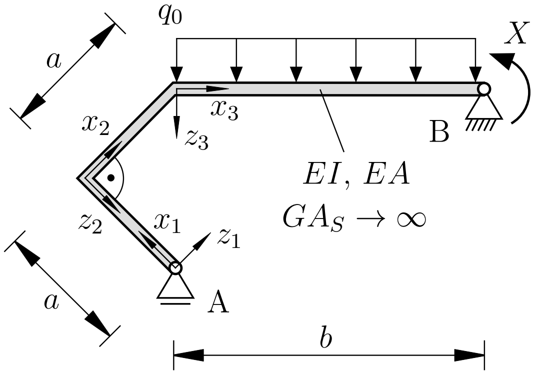
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

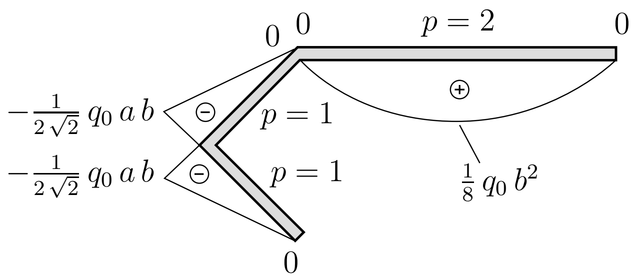
Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

b)
Ein alternatives Ersatzsystem ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.

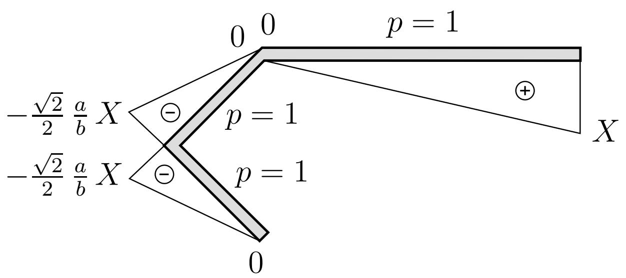


Die resultierenden Biegemomenten- und Normalkraftverläufe können aus den folgenden Abbildungen entnommen werden.

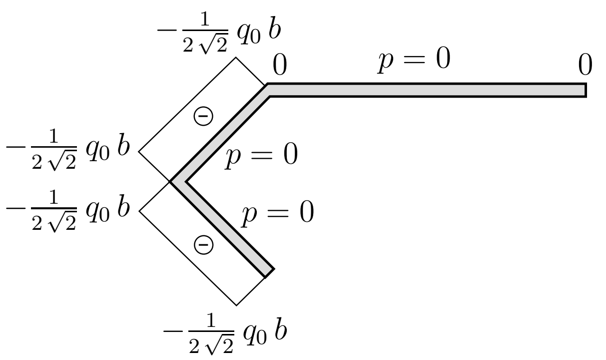
$M_q(x_i)$



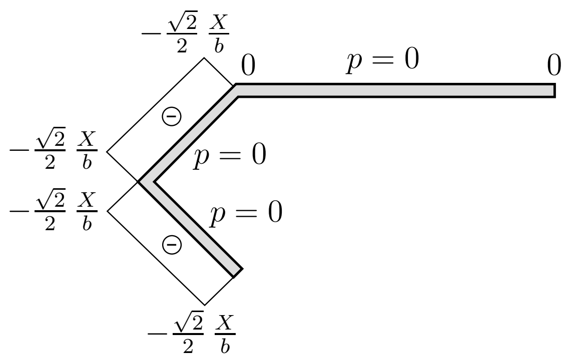
$M_X(x_i)$



$N_q(x_i)$



$N_X(x_i)$



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

Berechnen Sie das statisch überzählige Moment X. Geben Sie dabei die wichtigsten Zwischenschritte sowie das Ergebnis an. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig nachvollziehbar dargestellt wird. Die Ergebnisse sollen **nicht** vereinfacht werden. **(4,5 Punkte)**

$$\alpha_{10} = \frac{1}{EI}\left[2\,\frac{1}{3}\,a\,\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,q_0\,b\,a\right]\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{a}{b}\right] + \frac{1}{3}\,b\,\left[\frac{1}{8}\,q_0\,b^2\right]\right] + \frac{1}{EA}\left[2\,a\,\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,q_0\,b\right]\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{b}\right]\right]$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{EI}\left[2\,\frac{1}{3}\,a\,\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{a}{b}\right]^2 + \frac{1}{3}\,b\right] + \frac{1}{EA}\left[2\,a\,\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{b}\right]^2\right]$$

$$X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

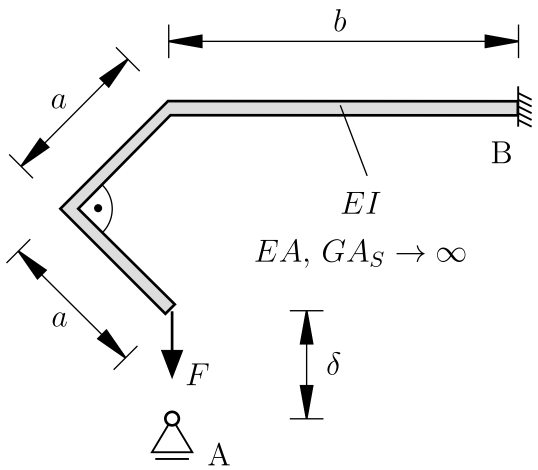
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

c)
Das Lager A wurde um δ zu weit unten positioniert. Nun wird eine Kraft F auf den ansonsten unbelasteten Rahmen (jetzt **dehnstarr**) aufgebracht.



Bestimmen Sie die im System gespeicherte Formänderungsenergie Π. Die Ergebnisse sollen **nicht** vereinfacht werden. **(1,5 Punkte)**

$$\Pi = \frac{1}{2}\,\frac{1}{EI}\left[2\,\frac{1}{3}\,a\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\,F\,a\right]^2 + \frac{1}{3}\,b\,[-F\,b]^2\right]$$

Bestimmen Sie die Kraft F derart, dass das freie Rahmenende zum Lager A verschoben wird. **(1,0 Punkte)**

$$F = \frac{3\,\delta\,EI}{a^3 + b^3}$$