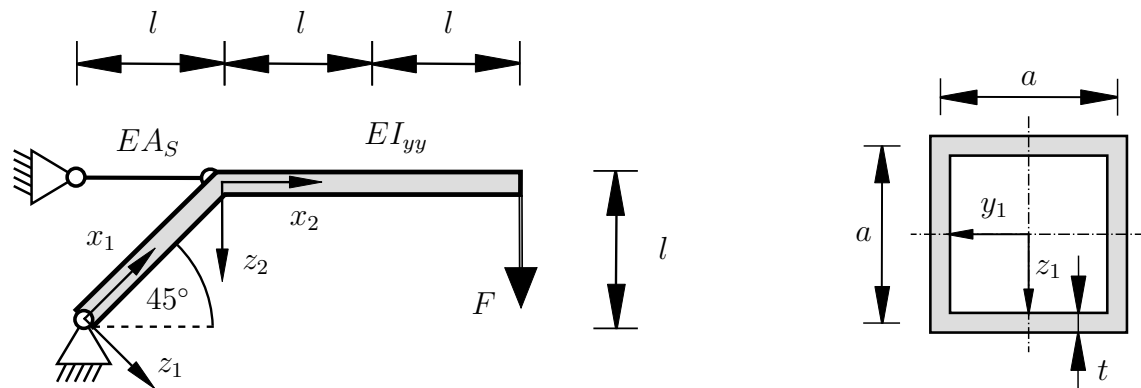


Hinweis:

Die nachfolgende Aufgabe ist eine Freitextaufgabe. Ausschließlich für diese Aufgabe wird der gesamte Rechenweg Ihrer Lösung bewertet. Für die jeweiligen Teilaufgaben stehen Ihnen die nachfolgenden Lösungskästchen zur Verfügung. Tragen Sie alle Ihre Rechenschritte in die Kästchen ein.

Aufgabe 1

Der Stab besitzt die Dehnsteifigkeit EA_S und die Länge l . Unter der Annahme $t \ll a$ gelten für die Querschnittsfläche A und das Flächenträgheitsmoment I_{yy} des Balkenprofils

$$A = 4at, \quad I_{yy} = \frac{2ta^3}{3}.$$

Für die Bezeichnung der Bereiche gilt:

Bereich I: $0 \leq x_1 \leq \sqrt{2}l$

Bereich II: $0 \leq x_2 \leq 2l$

a)

Bestimmen Sie im Bereich I des Balkens die betragsmäßig maximale Normalspannung σ^* und die Stelle (x_1^*, z_1^*) , an der diese vorliegt. **(4,5 Punkte)**

b)

Beeinflusst die Steifigkeit (EA_S/l) der Pendelstütze die Größe der maximalen Normalspannung im Balken? Begründen Sie Ihre Antwort. **(1,0 Punkte)**

c)

Berechnen Sie die Biegelinie im Bereich I. Verwenden Sie die allgemeinen Bezeichnungen für die Querschnittsfläche A und das Flächenträgheitsmoment I_{yy} . Die Dehnsteifigkeit und Schubsteifigkeit des Balkens sollen dabei nicht berücksichtigt werden. **(4,5 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau

Institut für Mechanik

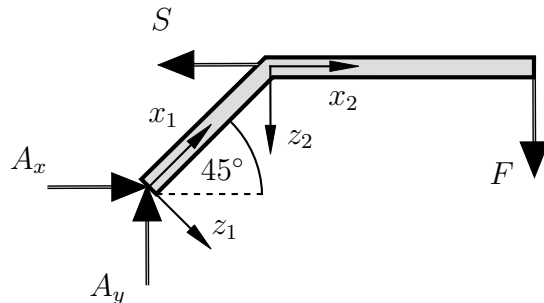
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: _____

Nachname: _____

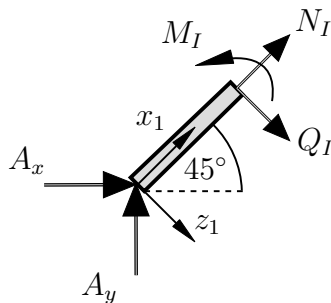
Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 1 a)

Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgen die Lagerkräfte:

$$A_x = 3F, \quad A_y = F, \quad S = 3F.$$

Freischnitt für Bereich I:



Aus den Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich die Schnittgrößen:

$$M_I(x_1) = -\sqrt{2}Fx_1, \quad N_I(x_1) = -2\sqrt{2}F$$

Die Normalspannung lautet damit

$$\sigma(x_1, z_1) = \frac{N_I}{A} + \frac{M_I(x_1)}{I_{yy}} z_1 = -\frac{2\sqrt{2}F}{A} - \frac{\sqrt{2}F x_1}{I_{yy}} z_1.$$

Maximaler Betrag tritt bei maximalem $|M_I|$ auf, also bei

$$x_1^* = \sqrt{2}l,$$

und an der Randfaser

$$z_1^* = \pm \frac{a}{2}.$$

Wählt man das Vorzeichen so, dass Biegung und Normalkraft addieren, ergibt sich

$$|\sigma^*| = \left| -\frac{2\sqrt{2}F}{A} - \frac{\sqrt{2}F \sqrt{2}l a}{I_{yy} 2} \right| = \frac{2\sqrt{2}F}{A} + \frac{Fl a}{I_{yy}}.$$

Mit $A = 4at$ und $I_{yy} = \frac{2}{3}ta^3$ auch

$$\sigma^* = \frac{\sqrt{2}F}{2at} + \frac{3Fl}{2ta^2}.$$

Aufgabe 1 b)

Da das System statisch bestimmt ist beeinflusst die Steifigkeit der Pendelstütze nicht die resultierenden Lagerkräfte. Die Schnittgrößen und damit die maximale Normalspannung ergeben sich ausschließlich aus den Gleichgewichtsbedingungen und sind unabhängig von der Steifigkeit (EA/l) der Pendelstütze.

Aufgabe 1c)

Für den Biegebalken gilt

$$EI_{yy} w_1''(x_1) = -M_1(x_1) = \sqrt{2} F x_1.$$

Zweifache Integration ergibt

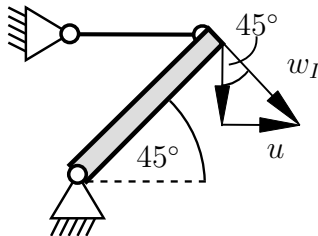
$$w_1(x_1) = C_1 x_1 + C_2 + \frac{\sqrt{2} F}{6EI_{yy}} x_1^3.$$

Am unteren Gelenk gilt

$$w_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0.$$

An der Pendelstütze $x_1 = \sqrt{2}l$ gilt nach Verschiebungsplan: $\sin(45^\circ)w_I(x_1 = \sqrt{2}l) = u$

mit $S = \sigma_{xx}A_S = \varepsilon_{xx}EA_S = \frac{\Delta l}{l}EA_S = \frac{u}{l}EA_S$



Daraus folgt die Randbedingung: $\frac{\sqrt{2}}{2}w_I(x_1 = \sqrt{2}l) = \frac{Sl}{EA_S}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2EI_{yy}} \left[\frac{\sqrt{2}}{6} F 2\sqrt{2}l^3 + c_1\sqrt{2}l \right] = \frac{3Fl}{EA_S} \Leftrightarrow c_1 = 3F \frac{EI_{yy}}{EA_S} - \frac{\sqrt{2}}{3} Fl^2$$

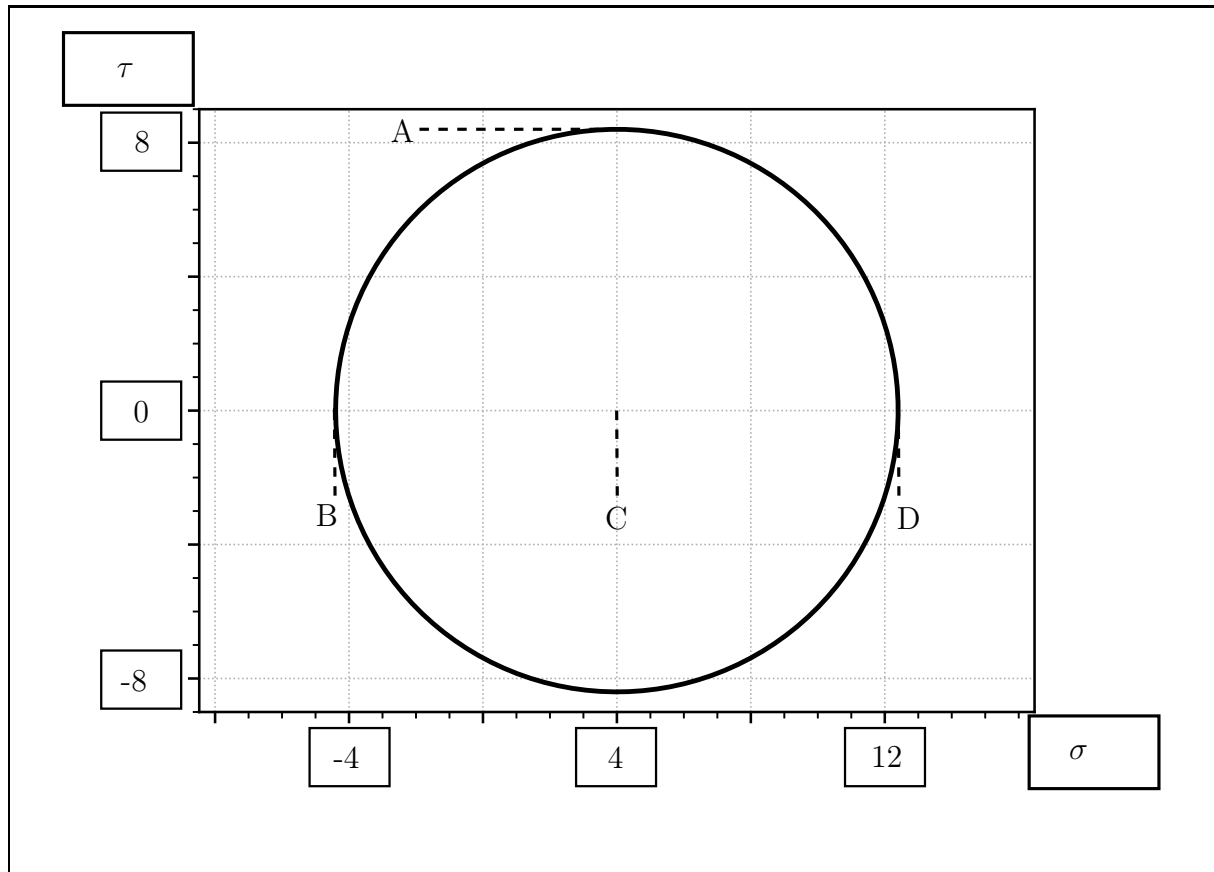
Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

a)

Für ein flaches Bauteil ist der ebene Spannungszustand gegeben als

$$\sigma = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

Beschriften Sie die Achsen des zugehörigen Mohr'schen Spannungskreises mit Zahlenwerten und den korrekten Spannungssymbolen. Nutzen Sie die vorgegebenen Kästchen. **(1,5 Punkte)**



Geben Sie an, welchen charakteristischen Größen des Spannungskreises die vier eingezeichneten Punkten A, B, C und D entsprechen. **(1,0 Punkte)**

A : $\tau_{\max}$ B : σ_2 C : σ_M D : σ_1

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

Bewerten Sie den obigen Spannungszustand gemäß der Gestaltänderungshypothese für eine kritische Spannung von $\sigma_{\text{krit}} = 12 \text{ MPa}$.

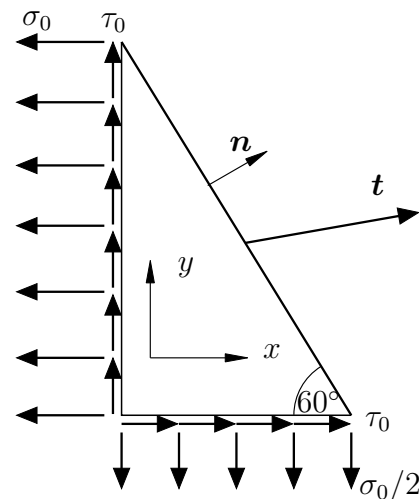
(1,0 Punkte)

$$\sigma_V \approx 15.23 \text{ MPa} > 12 \text{ MPa}$$

Die vorliegende Vergleichsspannung übersteigt die kritische Spannung, sodass das Bauteil nicht halten wird.

b)

Auf einem Blechausschnitt wirken die angegebenen Normal- und Schubspannungen. Berechnen Sie den Traktionsvektor $\mathbf{t}$ auf der schrägen Fläche.

**(2,0 Punkte)**

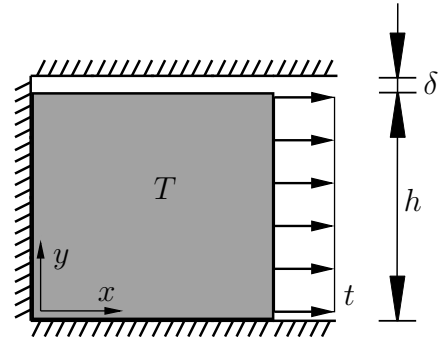
$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sin(60^\circ) \\ \cos(60^\circ) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & -\tau_0 \\ -\tau_0 & \sigma_0/2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}\sigma_0/2 & -\tau_0/2 \\ -\sqrt{3}\tau_0/2 & \sigma_0/4 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

c)

Eine quadratische elastische Scheibe (Materialparameter E , ν und α_T) wird durch eine homogene Temperaturdifferenz ΔT erwärmt und durch t belastet. Die Lagerung ist reibungsfrei und in Dickenrichtung (senkrecht zur $x - y$ Ebene) kann sich die Scheibe frei ausdehnen. Auf der Oberseite hat die Scheibe im unbelasteten Zustand einen Abstand von δ zur oberen Wand.



Berechnen Sie die notwendige Temperaturdifferenz ΔT , sodass die Scheibe die obere Wand gerade berührt. **(2,0 Punkte)**

$$\Delta T = \frac{\delta}{h \alpha_T} + \frac{\nu t_0}{E \alpha_T}$$

Das Bauteil wird weiter erwärmt auf eine Temperaturdifferenz $\Delta T^* > \Delta T$. Bestimmen Sie **alle** dreidimensionalen Spannungs- und Dehnungskomponenten. **(2,5 Punkte)**

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0 \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

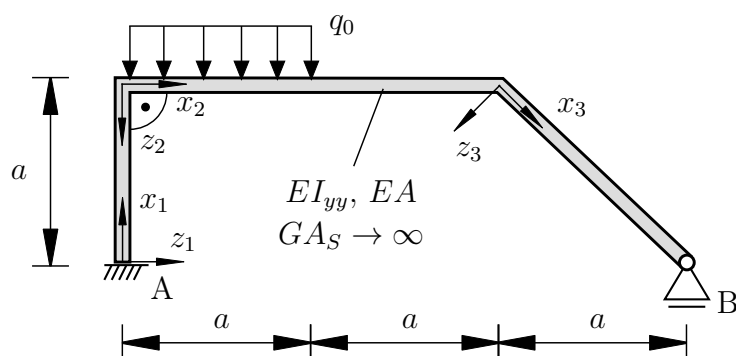
$$\sigma_{yy} = \frac{E \delta}{h} + \nu t_0 - E \alpha_T \Delta T^*$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu t_0}{E} - \frac{\nu \delta}{h} - \frac{\nu^2 t_0}{E} + [1 + \nu] \alpha_T \Delta T^*$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1 - \nu^2}{E} t_0 - \frac{\nu \delta}{h} + [1 + \nu] \alpha_T \Delta T^*$$

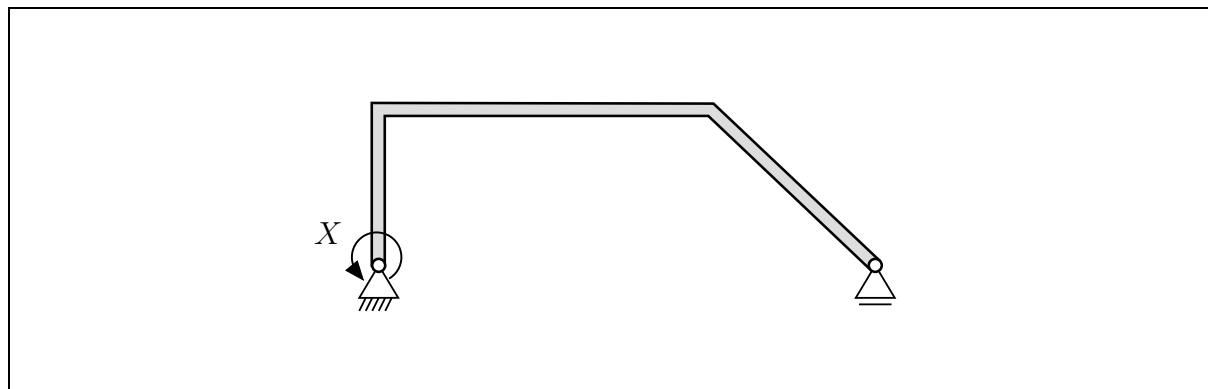
Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

Das folgende Rahmensystem ist statisch unbestimmt gelagert.

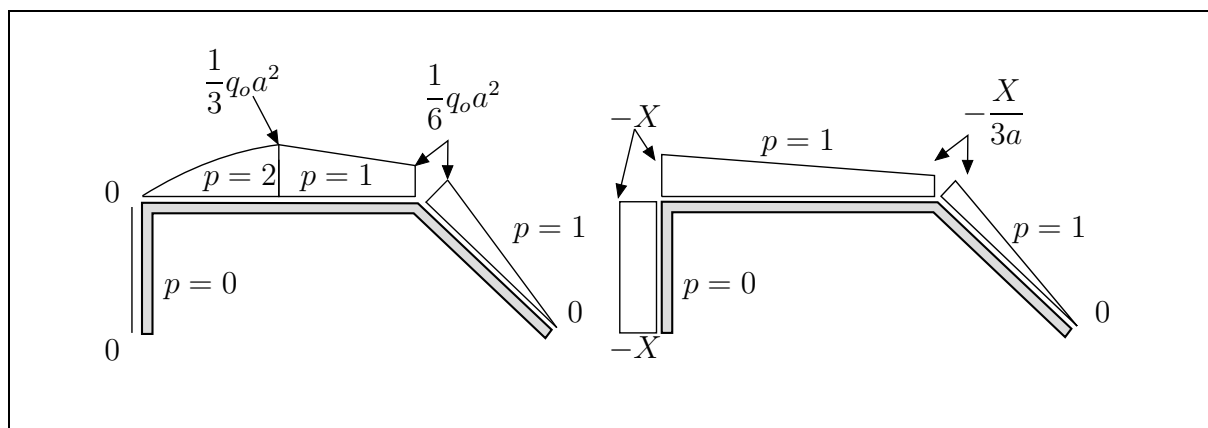


a)

Skizzieren Sie das statisch bestimmte Ersatzsystem, welches sich ergibt, wenn ein virtuelles Moment X an geeigneter Stelle eingeführt wird. **(0,5 Punkte)**



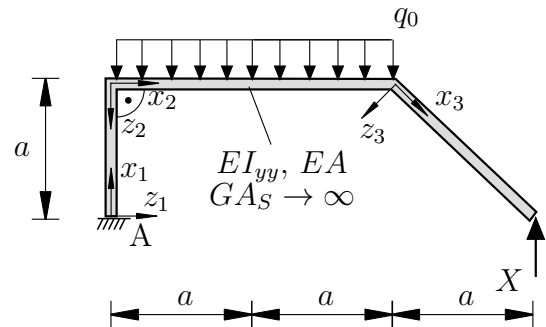
Zeichnen Sie die Biegemomentenverläufe $M_q(X = 0)$ und $M_X(q_0 = 0)$ des statisch bestimmten Ersatzsystems. Geben Sie charakteristische Werte und die jeweiligen Polynomgrade p der Funktionen mit an. **(2,5 Punkte)**



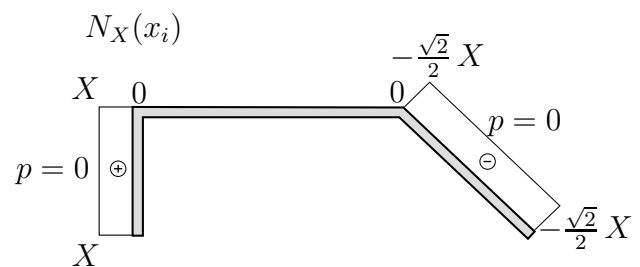
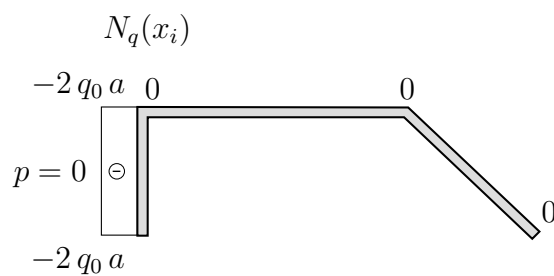
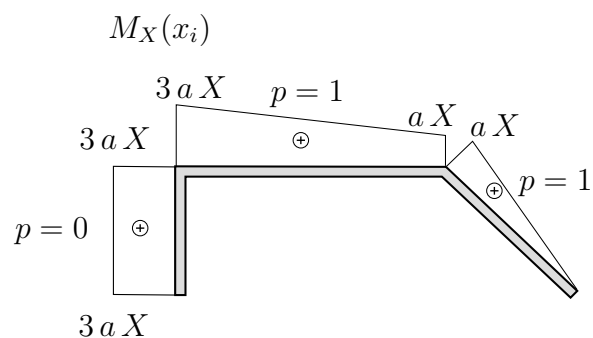
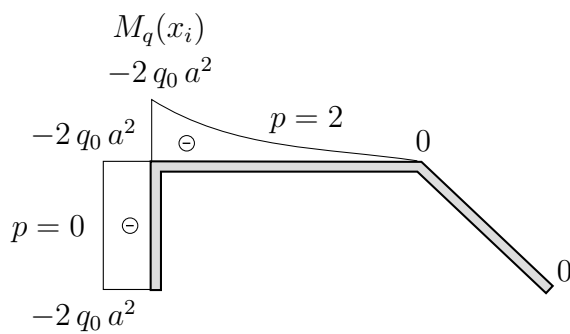
Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

b)

Ein alternatives Ersatzsystem mit veränderter Belastung ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



Die resultierenden Biegemomenten- und Normalkraftverläufe können aus den folgenden Abbildungen entnommen werden.



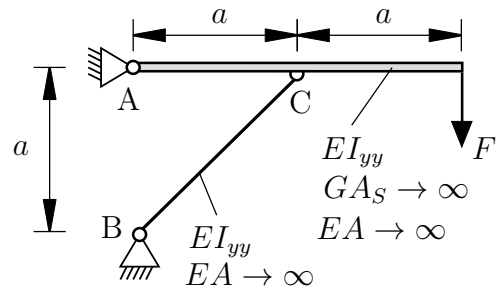
Berechnen Sie die statisch überzählige Kraft X . Geben Sie dabei die wichtigsten Zwischenschritte sowie das Ergebnis an. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig nachvollziehbar dargestellt wird. Die Ergebnisse sollen nicht vereinfacht werden. **(3,0 Punkte)**

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

$$X = -\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{11}}$$
$$\alpha_{01} = \frac{1}{EI} \left[-6q_0a^4 - \frac{4}{3}q_0a^4 - 2q_0a^4 \right] + \frac{1}{EA} \left[-2q_0a^2 \right]$$
$$\alpha_{11} = \frac{1}{EI} \left[9a^3 + \frac{26}{3}a^3 + \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 \right] + \frac{1}{EA} \left[a + \frac{\sqrt{2}}{2}a \right]$$

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

Im Folgenden wird das nebenstehende System betrachtet.



c)

Bestimmen Sie die im System gespeicherte Formänderungsenergie Π . Die Ergebnisse sollen **nicht** vereinfacht werden. **(1,0 Punkte)**

$$\Pi = \int_0^a \frac{1}{2} \frac{[-Fx]^2}{EI} dx + \int_0^a \frac{1}{2} \frac{[(x-a)F]^2}{EI} dx = \frac{1}{3} \frac{1}{EI} F^2 a^3$$

Bestimmen Sie die Verdrehung φ im Punkt A. Die Ergebnisse sollen **nicht** vereinfacht werden. **(1,0 Punkte)**

$$\varphi = \int_0^a \frac{M_0 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \frac{1}{6} F a^2$$

Legen Sie abschließend den Radius r_m einer Pendelstütze für den Bereich B–C mit einem dünnwandigen Kreisringquerschnitt mit gegebener Dicke t aus. Die Stütze soll eine dreifache Sicherheit gegen Knickung aufweisen. Geben Sie relevante Zwischenschritte an. **(2,0 Punkte)**

Hinweis: Das Flächenträgheitsmoment ist laut Tabellenwerk $I_{yy} = \pi r_m^3 t$.

$$F_{krit} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \text{ (Knickung: 2.Euler Fall), } S = 2\sqrt{2}F \text{ (Stabkraft des Systems),}$$

$$l = \sqrt{2}a \text{ (Länge des Stabs), } 3S \leq F_{krit} \text{ (3-fache Sicherheit)}$$

$$r_m \geq \sqrt[3]{\frac{12\sqrt{2}Fa^2}{\pi^3 Et}}$$