TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

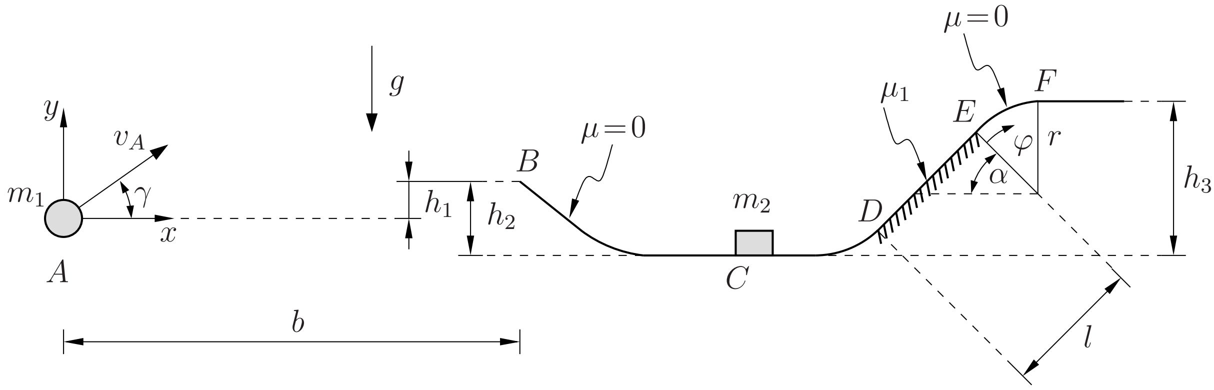
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Eine Kugel (Masse m_1) bewegt sich in Punkt A mit der initialen Geschwindigkeit v_A unter dem Winkel γ zur Horizontalen. Nach dem Auftreffen auf die zunächst glatte Bahn in Punkt B, stößt die Kugel vollkommen elastisch auf den Körper der Masse m_2 in Punkt C. Anschließend bewegt sich dieser Körper über die Bahn zu Punkt F, wobei im Abschnitt von Punkt D bis E Reibung auftritt. Die genauen Abmessungen, sowie das zu verwendende Koordinatensystem sind der Abbildung zu entnehmen.



a)

Geben Sie für den Flug der Kugel von A nach B den Ortsvektor $\mathbf{s}(t) = x(t)\,\mathbf{e}_x + y(t)\,\mathbf{e}_y$ als Funktion der Zeit t in kartesischen Koordinaten an. **(1,5 Punkte)**

$$\mathbf{s}(t) = [v_A \cos(\gamma)\, t\,]\,\mathbf{e}_x + \left[v_A \sin(\gamma)\, t - \tfrac{1}{2} g t^2\right]\mathbf{e}_y$$

Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_A in Abhängigkeit der in der Abbildung gegebenen Größen, sodass die Kugel in Punkt B von oben auf die Bahn trifft. **(1,0 Punkte)**

$$v_A = \sqrt{\frac{g b^2}{2\cos^2(\gamma)\,(b\,\tan(\gamma) - h_1)}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_C der Kugel unmittelbar vor dem Stoß mit dem Körper der Masse m_2. Der Höhenunterschied zwischen den Punkten B und C ist h_2.

(1,0 Punkte)

Hinweis: Die Geschwindigkeit v_B in B ist für diesen Aufgabenteil gegeben.

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + 2gh_2}$$

c)

Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\bar{v}_C$ des Körpers (Masse m_2) kurz nach dem vollkommen elastischen Stoß und bestimmen Sie das Masseverhältnis von m_1 und m_2, sodass die Kugel nach dem Stoß in Ruhe bleibt.

(1,0 Punkte)

Hinweis: Die Geschwindigkeit v_C der Kugel kurz vor dem Stoß ist gegeben.

$$\bar{v}_C = \frac{m_1 v_C}{m_2} \;, \quad \frac{m_1}{m_2} = 1$$

d)

Berechnen Sie den maximalen Reibungskoeffizienten μ_1 auf dem Bahnabschnitt von Punkt D nach E, sodass der Körper (Masse m_2) in Punkt F zum Stillstand kommt.

(1,5 Punkte)

Hinweis: Die Geschwindigkeit $\bar{v}_C$ des Körpers (m_2) kurz nach dem Stoß mit der Kugel kann als gegeben betrachtet werden und muss nicht ersetzt werden.

$$\mu_1 = \frac{\bar{v}_C^2 - 2gh_3}{2gl\sin(\alpha)}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

e)

Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ in dem Abschnitt von E bis F. (**2,0 Punkte**)

Hinweis: Die Geschwindigkeit $\bar{v}_C$ ist erneut gegeben.

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\sqrt{\bar{v}_C^2 - 2\mu_1 g l \sin(\alpha) - 2g(h_3 + r\sin(\alpha+\varphi) - r)}$$

Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit v_E des Masseklotz in Punkt E, sodass der Körper (Masse m_2) die Bahn im folgenden Streckenabschnitt nicht verlässt. (**2,0 Punkte**)

Hinweis: Die Geschwindigkeit $\bar{v}_C$ ist erneut gegeben.

$$v_E < \sqrt{rg\sin(\alpha)}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

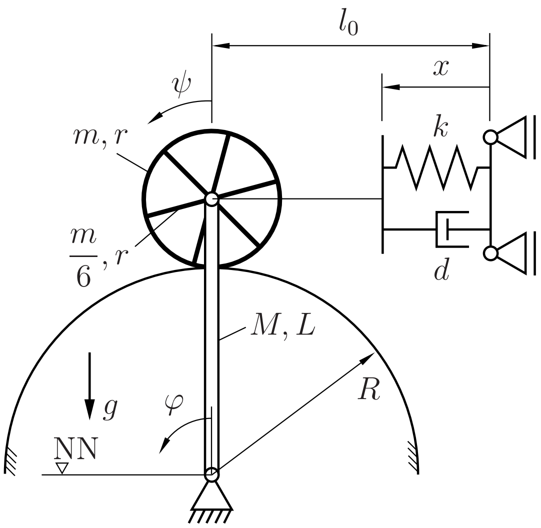
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

Das nebenstehende System befindet sich im Schwerefeld. Es besteht aus einer drehbar gelagerten Stange (Masse M, Länge L) an deren Ende ein Hohlrad (Masse m, Radius r) mit sechs Speichen (jeweils Masse $m/6$) gelenkig angebracht ist. Das Hohlrad rollt schlupffrei auf einer Kreisbahn (Radius R) ab. Das Stangenende ist über ein Seil mit einer ungespannten Feder (Federkonstante k, **ungespannte Länge** x_0) und einem Dämpfer (Dämpferkonstante d) verbunden.



a)
Geben Sie die Koordinaten x und ψ in Abhängigkeit der Koordinate φ an.(**1,0 Punkte**)

$$x(\varphi) = x_0 + L\,\sin(\varphi)\ , \quad \psi(\varphi) = \frac{\varphi\, L}{r}$$

b)
Geben Sie die kinetische Energie E_{kin} des Systems inklusive aller Massenträgheitsmomente in Abhängigkeit der Koordinaten φ, ψ und x an. (**3,0 Punkte**)

Hinweis: Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil a) sollen nicht eingesetzt werden. Das auf seinen Schwerpunkt bezogene Massenträgheitsmoment eines Hohlrades der Masse $\widetilde{M}$ mit dem Radius $\widetilde{R}$ ist gegeben durch $\Theta^{\text{Hohlrad}} = \widetilde{M}\,\widetilde{R}^2$.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\,M\,L^2\,\dot{\varphi}^2 + M\left(\dot{\varphi}\,\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\,m\,r^2\,\dot{\psi}^2 + 2\,m\left(\dot{\psi}\,r\right)^2\right)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

c)
Geben Sie die potentielle Energie E_{pot} des Systems in Abhängigkeit der Koordinaten φ, ψ und x bezogen auf das vorgegebene Nullniveau NN an. (**2,0 Punkte**)

Hinweis: Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil a) sollen nicht eingesetzt werden.

$$E_{\text{pot}} = M\,g\,\frac{L}{2}\,\cos(\varphi) + 2\,m\,g\,L\,\cos(\varphi) + \frac{1}{2}\,k\,(x - x_0)^2$$

d)
Geben Sie die virtuelle Arbeit δW der nichtkonservativen Kräfte in Abhängigkeit der Koordinaten φ, ψ und x an. (**1,0 Punkte**)

Hinweis: Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil a) sollen nicht eingesetzt werden.

$$\delta W = -d\,\dot{x}\,\delta\,x$$

Aufgabenteil e) befindet sich auf der nächsten Seite!

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

e)
Für ein anderes konservatives System sind die kinetische und potentielle Energie in Abhängigkeit der Koordinate φ durch

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= \frac{17}{6}\, m\, a^2\, \dot{\varphi}^2 \;, \\
E_{\text{pot}} &= 3\, m\, g\, a \cos\varphi + 2\, c\, a^2 (\sin\varphi)^2 + \frac{1}{2}\, c\, a^2\, (\sin\varphi)^2 \;,
\end{aligned}
$$

vorgegeben.

Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Lage $\varphi = 0$.
(2,0 Punkte)

$$
\frac{17}{3}\, m\, a^2\, \ddot{\varphi} - 3\, m\, g\, a\, \varphi + 5\, c\, a^2\, \varphi = 0
$$

Geben Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 für kleine Auslenkungen um die Lage $\varphi = 0$ an.
(1,0 Punkte)

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{15}{17}\,\frac{c}{m} - \frac{9}{17}\,\frac{g}{a}}
$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

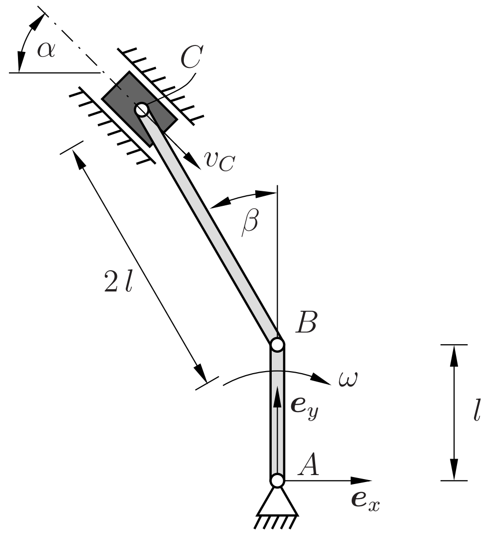
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

Bei dem dargestellten Motor wird die Kurbelwelle $\overline{AB}$ durch eine Pleuelstange $\overline{BC}$ sowie einen um den Winkel α geneigten Kolben in Punkt C angetrieben. Im dargestellten Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit des Kolbens v_C bekannt. Die Bezeichnungen und Abmessungen können Sie der nebenstehenden Skizze entnehmen.



a)
Bestimmen Sie die Lage $\boldsymbol{r}_\mathrm{M} = r_\mathrm{M}^y \, \boldsymbol{e}_y$ des Momentanpols M der Pleuelstange $\overline{BC}$ und zeichen Sie diesen in obige Skizze ein. **(2,0 Punkte)**

$$r_\mathrm{M}^y = l + 2\,l \left[\cos(\beta) + \frac{\sin(\beta)}{\tan(\alpha)} \right]$$

Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω gemäß des eingezeichneten Drehsinns für die dargestellte Lage des Systems. **(2,0 Punkte)**

$$\omega = \frac{v_C}{l} \sin(\alpha) \left[\tan^{-1}(\alpha) + \tan^{-1}(\beta) \right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

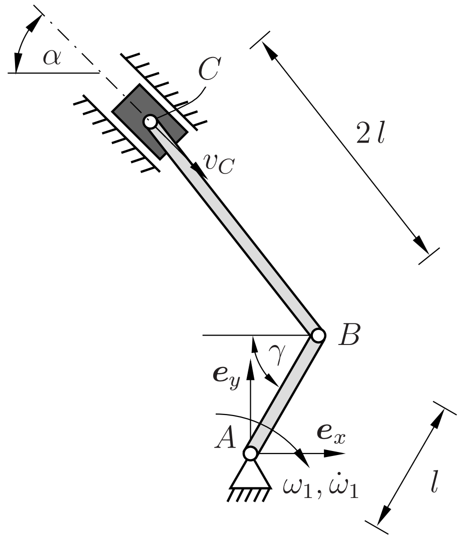
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

Der Motor ist nun zu einem anderen Zeitpunkt dargestellt. Die weiteren Bezeichnungen und Abmessungen können Sie der nebenstehenden Skizze entnehmen.



b)
Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_B$ sowie die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_B$ in Punkt B für die dargestellte Lage des Systems. Geben Sie die Vektorkomponenten im $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y\}$-Koordinatensystem an und nehmen Sie an, dass ω_1 und $\dot{\omega}_1$ bekannt sind. **(3,0 Punkte)**

Hinweis: Beachten Sie den eingezeichneten Drehsinn der gegebenen Größen.

$$\boldsymbol{v}_B = \sin(\gamma)\,\omega_1\,l\,\boldsymbol{e}_x$$

$$-\cos(\gamma)\,\omega_1\,l\,\boldsymbol{e}_y$$

$$\boldsymbol{a}_B = \sin(\gamma)\,\dot{\omega}_1\,l - \cos(\gamma)\,\omega_1^2\,l\,\boldsymbol{e}_x$$

$$-\cos(\gamma)\,\dot{\omega}_1\,l - \sin(\gamma)\,\omega_1^2\,l\,\boldsymbol{e}_y$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

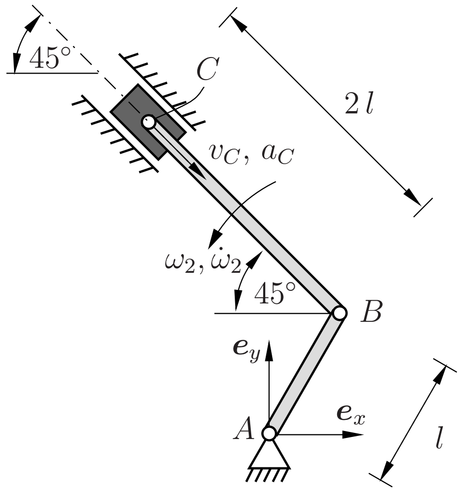
Vorname: __________________

Nachname: __________________

Matr.-Nr.: __________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

Der Motor ist nun erneut zu einem anderen Zeitpunkt dargestellt. Die Bezeichnungen und Abmessungen können Sie der nebenstehenden Skizze entnehmen.



c)
Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω_2 und den Betrag der Geschwindigkeit $\|\boldsymbol{v}_C\|$ in Punkt C für die dargestellte Lage des Systems. Beachten Sie die eingezeichneten Richtungen/Drehsinne. Nehmen Sie dabei an, dass die Geschwindigkeit in Punkt B als $\boldsymbol{v}_B = v_B^x\,\boldsymbol{e}_x + v_B^y\,\boldsymbol{e}_y$ gegeben ist. **(3,0 Punkte)**

$$\omega_2 = \frac{v_B^x + v_B^y}{2\sqrt{2}\,l}$$

$$v_C = \|\boldsymbol{v}_C\| = \frac{v_B^x - v_B^y}{\sqrt{2}}$$