TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

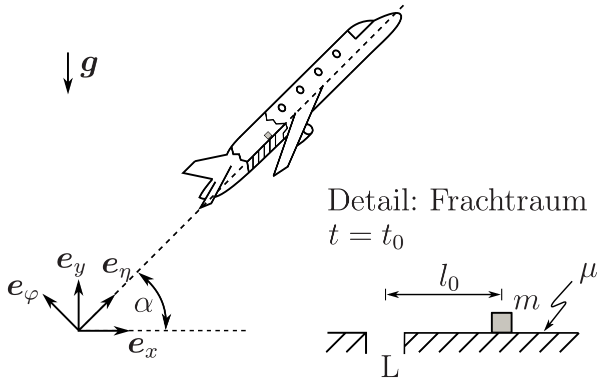
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Zu einem Zeitpunkt $t_0 = 0$ weist das dargestellte Flugzeug die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_F = v_F\,\boldsymbol{e}_\eta$ sowie die für $t \geq t_0$ konstante Beschleunigung $\boldsymbol{a}_F = a_F\,\boldsymbol{e}_\eta$ auf, wobei $0 < \alpha < \pi/2$ gilt. Im Frachtraum des Flugzeugs beginnt zu diesem Zeitpunkt eine Kiste der Masse m zu rutschen (Gleitreibungskoeffizient μ). Diese Kiste hat zum Zeitpunkt $t = t_0$ einen Abstand l_0 zur offenen Ladeluke L im Heck des Flugzeugs.



a)
Bestimmen Sie die Absolutbeschleunigung der Kiste $\boldsymbol{a}_K$ bezüglich der raumfesten Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\eta$ und $\boldsymbol{e}_\varphi$. **(2,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{a}_K = -g\,\sin(\alpha) + \mu\,g\,\cos(\alpha) \quad \boldsymbol{e}_\eta + \quad 0 \quad \boldsymbol{e}_\varphi$$

b)
Die Absolutbeschleunigung der Kiste sei im folgenden zu $\boldsymbol{a}_K = a_K \boldsymbol{e}_\eta$ vorgegeben. Bestimmen Sie die Relativgeschwindigkeit der Kiste $\boldsymbol{v}_{rel}$, relativ zum Flugzeug, als Funktion der Zeit. **(1,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{v}_{rel}(t) = (a_K - a_F)\;t \quad \boldsymbol{e}_\eta + \quad 0 \quad \boldsymbol{e}_\varphi$$

Bestimmen Sie den Zeitpunkt t^*, an dem die Kiste das Flugzeug durch die offene Ladeluke L verlässt. **(1,0 Punkte)**

$$t^* = \sqrt{\frac{-2\,l_0}{a_K - a_F}} = \sqrt{\frac{2\,l_0}{a_F - a_K}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

Bestimmen Sie zudem die Absolutgeschwindigkeit der Kiste $\boldsymbol{v}^*$ unmittelbar nach dem Verlassen des Flugzeugs. Geben Sie diese bezüglich der ortsfesten orthonormalen Basisvektoren $\boldsymbol{e}_x$ und $\boldsymbol{e}_y$ an.

(1,5 Punkte)

$$\boldsymbol{v}^* = \left[v_F + a_K \sqrt{\frac{-2\,l_0}{a_K - a_F}}\right] \cos(\alpha) \quad \boldsymbol{e}_x + \left[v_F + a_K \sqrt{\frac{-2\,l_0}{a_K - a_F}}\right] \sin(\alpha) \quad \boldsymbol{e}_y$$

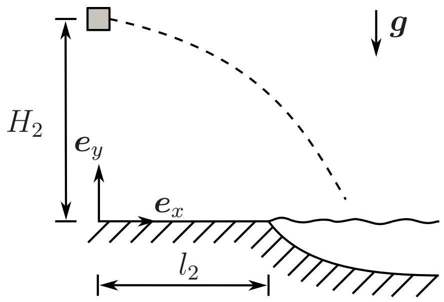
c)
Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}^* = v_x^*\,\boldsymbol{e}_x + v_y^*\,\boldsymbol{e}_y$ mit $v_x^*, v_y^* > 0$ und die Höhe der Kiste H_1 über dem Boden unmittelbar nach Verlassen des Flugzeugs seien gegeben. Bestimmen Sie die maximale Höhe über dem Boden $H_{\max}$, welche die Kiste erreicht. **(1,0 Punkte)**

$$H_{\max} = H_1 + \frac{v_y^{*2}}{g} - \frac{1}{2\,g} v_y^{*2} = H_1 + \frac{1}{2\,g} v_y^{*2}$$

d)
Zu einem nicht näher spezifizierten Zeitpunkt befinde sich die Kiste auf der Höhe H_2 und weise die Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}_2 = v_{2x}\,\boldsymbol{e}_x + v_{2y}\,\boldsymbol{e}_y$$

mit $v_{2x} > 0, v_{2y} < 0$ auf. In einer Entfernung l_2 befinde sich ein See.



Wie groß darf die Länge l_2 höchstens sein, damit die Kiste im Wasser landet?

(2,0 Punkte)

$$l_2 < v_{2x} \left[\frac{v_{2y}}{g} + \sqrt{\left[\frac{v_{2y}}{g}\right]^2 + \frac{2}{g} H_2}\right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

e)
Zu einem bestimmten Zeitpunkt öffne sich ein an der Kiste befestigter Fallschirm, wobei die Kiste zu diesem Zeitpunkt die vertikale Geschwindigkeits-Komponente $v_B\,\boldsymbol{e}_y$ mit $v_B < 0$ aufweise. Die Kiste benötige so bis zur Landung die Zeit t_L und soll dann die Geschwindigkeits-Komponente $v_L\,\boldsymbol{e}_y$ aufweisen. Berechnen Sie daraus die als konstant anzunehmende Kraft F_F, welche durch den Luftwiderstand über den Fallschirm auf die Kiste während des Falls einwirkt. **(1,5 Punkte)**

$$F_F = \left[\frac{V_L - V_B}{t_L} + g\right] m$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

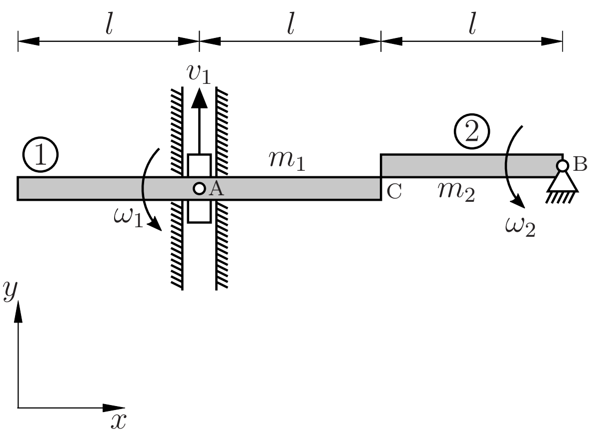
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

a)
Wie nebenstehend gezeigt bewegt sich ein stabförmiger Rotor (Masse m_1) auf einem masselosen Schlitten mit der konstanten Geschwindigkeit v_1 entlang einer Nut. Gleichzeitig dreht sich der Rotor mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1 um den Punkt A. Zu einem bestimmten Zeitpunkt trifft der Endpunkt des Rotors gegen das Ende ($\widehat{=}$ Punkt C) eines in Punkt B frei drehbar gelagerten und vor diesem Moment unbewegten Stabes (Masse m_2). Beide Strukturen stehen in diesem Moment parallel zur vorgegebenen x-Richtung.

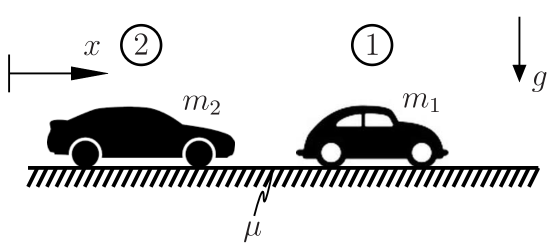


Stellen Sie die zur Lösung des Stoßproblems notwendige kinematische Beziehung zwischen den Größen v_1 ($\widehat{=}$ Geschwindigkeit des Punktes A), ω_1 ($\widehat{=}$ Winkelgeschw. des Rotors) und ω_2 ($\widehat{=}$ Winkelgeschw. des Stabes) auf. **(1,0 Punkte)**

$$v_1 + \omega_1 l = -\omega_2 l$$

Nennen Sie (auf der nachfolgenden Seite) sämtliche Gleichungen, die zur vollständigen Berechnung der kinematischen Größen beider Strukturen unmittelbar nach dem Stoßvorgang notwendig sind. Nennen Sie zudem gesondert die zu berechnenden, unbekannten Größen des Gleichungssystems. Der Stoßvorgang soll als teilelastisch angenommen werden (Stoßziffer e). **(5,0 Punkte)**

b)
Bei einem Autounfall ist zu klären, ob der Verursacher eventuell mit überhöhter Geschwindigkeit gefahren ist. Gemäß der Zeugenaussagen ist Fahrzeug 2 (Masse m_2) frontal in das Heck des still stehenden Fahrzeugs 1 (Masse m_1) gefahren. Zudem sei Fahrzeug 2 unmittelbar nach dem Zusammenprall direkt zum Stillstand gekommen.



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

$$m_A(\bar{v}_1 - v_1) = -\hat{F}$$
$$\Theta_A(\bar{\omega}_1 - \omega_1) = -\hat{F}\,l$$
$$\Theta_B(\bar{\omega}_2 - \omega_2) = -\hat{F}\,l$$
$$e = -\frac{\bar{\omega}_2\,l - \bar{v}_1 - \bar{\omega}_1\,l}{-v_1 - \omega_1\,l}$$
$$mit\ \Theta_A = \tfrac{1}{12}m_1(2l)^2 = \tfrac{1}{3}m_1 l^2 \quad \Theta_B = \tfrac{1}{3}m_2 l^2$$

$4\ Gleichungen$
$4\ Unbekannte: \bar{v}_1, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \hat{F}$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

Der Zusammenhang der kinematischen Größen beider Fahrzeuge lässt sich (auch) durch die Gleichung

$$-m_1\, v_1 + m_1\, \overline{v}_1 - m_2\, v_2 + m_2\, \overline{v}_2 = 0$$

darstellen. Geben Sie die Geschwindigkeit $\overline{v}_1$ des Fahrzeugs 1 unmittelbar nach dem Stoß in Abhängigkeit der Größen m_1, m_2 und v_2 an. **(1,0 Punkte)**

$$\overline{v}_1 = \frac{m_2}{m_1} v_2$$

Der Fahrer des Fahrzeugs 1 hat direkt nach dem Aufprall stark gebremst, sodass die Räder blockierten und dieses Fahrzeug lediglich glitt. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen den Reifen und der Straße sei durch μ gegeben. Geben Sie zunächst die Weg-Zeit-Funktion $x(t)$ an. **(1,0 Punkte)**

$$x(t) = -\tfrac{1}{2}\mu g t^2 + \bar{v}_1 t$$

Geben Sie nun die bis zum Stillstand dieses Fahrzeugs vergangene Zeit t^* an. **(1,0 Punkte)**

$$t^* = \frac{\bar{v}_1}{\mu\, g}$$

Leiten Sie abschließend die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v_2 des Fahrzeugs 2 unmittelbar vor dem Stoß und dem gemessenen Bremsweg Δx des Fahrzeugs 1 in Abhängigkeit gegebener Größen her. **(1,0 Punkte)**

$$v_2(\Delta x) = \sqrt{2\mu g \Delta x}\,\frac{m_1}{m_2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

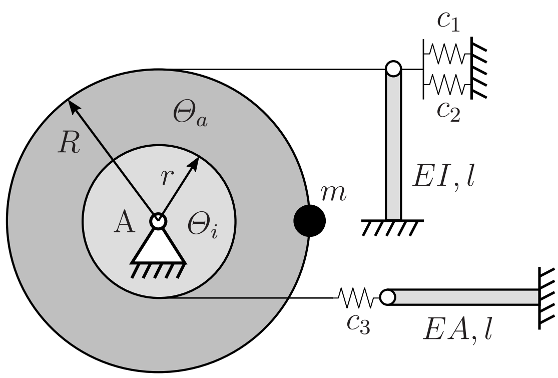
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

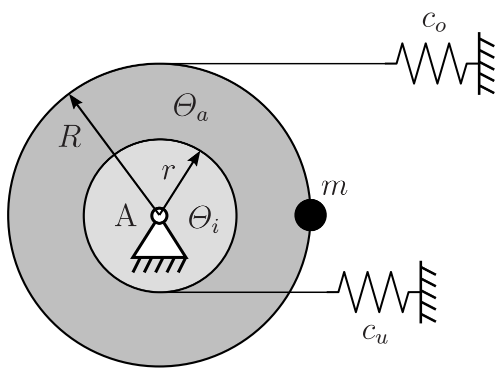
a)
Das nebenstehende System besteht aus einer um den Punkt A drehbar gelagerten Stufenrolle (Radien r und $R = 2\,r$). Die Massenträgheitsmomente der beiden Stufen bezogen auf den Punkt A sind mit Θ_i und Θ_a bekannt. Zusätzlich ist eine Punktmasse (Masse m) auf dem Außenrand befestigt. Auf beiden Stufen sind Seile aufgerollt, deren Enden mit vorgespannten Elementen verbunden sind.



Berechnen Sie die Ersatzfedersteifigkeiten für die Gruppierungen, die am oberen (c_o) und am unteren (c_u) Seil befestigt sind. **(2,0 Punkte)**

$$c_o = c_1 + c_2 + \frac{3\,EI}{l^3}, \; c_u = \frac{1}{\dfrac{1}{c_3} + \dfrac{l}{EA}}$$

b)
Das nebenstehende System aus Aufgabenteil a) wurde dahingehend modifiziert, dass die oben und unten an Seilen befestigten Elemente durch einzelne Federn ersetzt wurden (Federsteifigkeiten c_o, c_u). Die Federn sind in der dargestellten Lage um $\Delta l_o > 0$ (oben) bzw. $\Delta l_u > 0$ (unten) vorgespannt.



Zeichnen Sie zunächst einen geeigneten Freiheitsgrad zur Beschreibung von Eigenschwingungen um die dargestellte Lage ein. Geben Sie anschließend die kinetische E_{kin} und potentielle Energie E_{pot} des Systems als Funktion des von Ihnen gewählten Freiheitsgrades an. **(3,0 Punkte)**

Hinweis: Die einzelnen Terme müssen nicht zusammengefasst werden.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

Gewählter Freiheitsgrad: Rotation im Uhrzeigersinn φ

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}\,(\Theta_i\,\dot{\varphi}^2 + \Theta_a\,\dot{\varphi}^2 + m\,(R\,\dot{\varphi})^2) \\ E_{\text{pot}} &= \frac{1}{2}\,c_o\,(\Delta l_o - \varphi\,R)^2 + \frac{1}{2}\,c_u\,(\Delta l_u + \varphi\,r)^2 \end{aligned}$$

Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems für die von Ihnen gewählte Koordinate auf. **(2,0 Punkte)**

$$(\Theta_i + \Theta_a + m\,R^2)\,\ddot{\varphi} + (c_o\,R^2 + c_u\,r^2)\,\varphi = c_o\,R\,\Delta l_o - c_u\,r\,\Delta l_u$$

Geben Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 des Systems an. **(1,0 Punkte)**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_o\,R^2 + c_u\,r^2}{\Theta_i + \Theta_a + m\,R^2}}$$

c)
Für das System aus Aufgabenteil b) gelte nun $\Delta l_o = 2\,\Delta l_u$. Wie muss das Verhältnis von c_o zu c_u gewählt werden, damit die dargestellte Lage der Ruhelage entspricht?
(1,0 Punkte)

$$\frac{c_o}{c_u} = \frac{1}{4}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

d)
Wie ändert sich die Eigenkreisfrequenz des Systems, falls an der Stufenrolle ein zeitlich veränderliches Moment $M_0 \cos(\Omega t)$ angreift? Geben Sie eine kurze Begründung an!

(**1,0 Punkte**)

Die Eigenkreisfrequenz bleibt unverändert, da das System unverändert bleibt.