TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

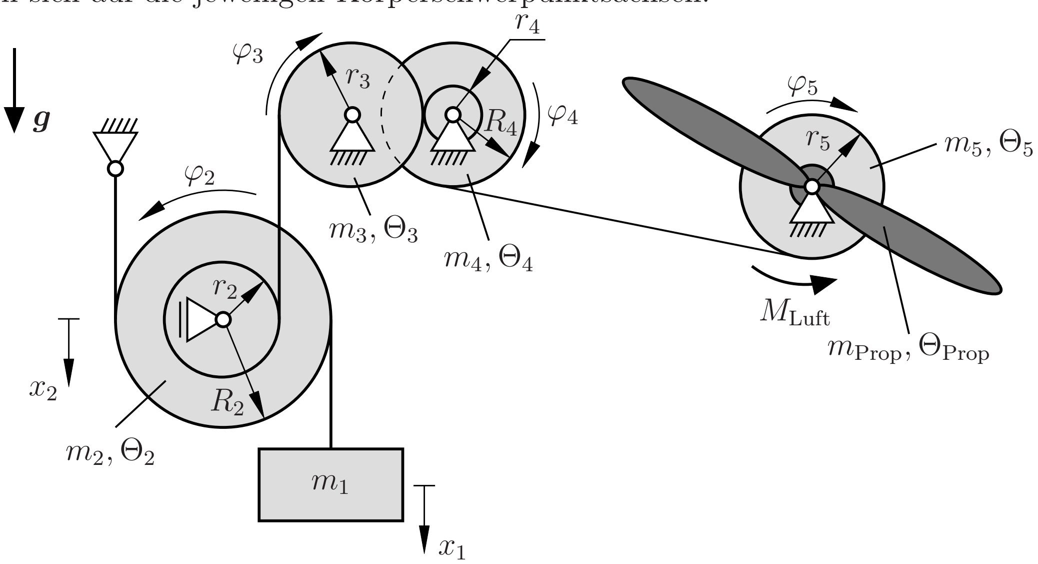
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

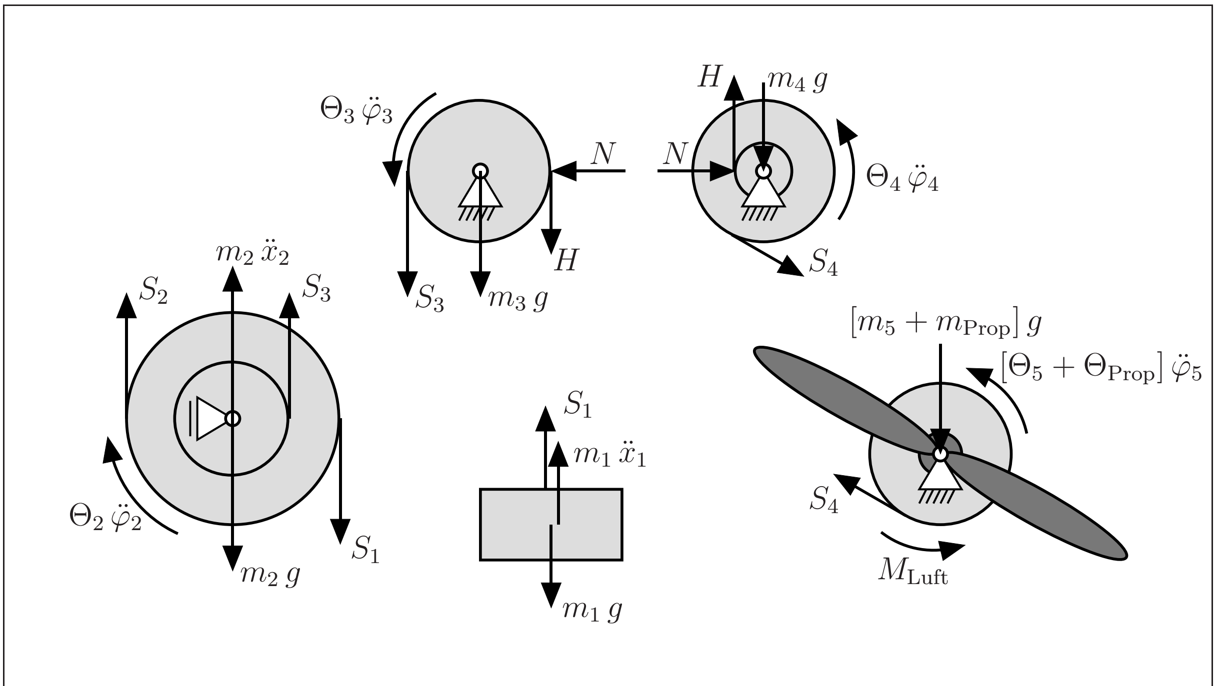
Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Der Propeller eines aufziehbaren Spielzeugflugzeugs soll durch das unten dargestellte System aus dehnstarren Seilen, Massen und (Stufen-)Rollen angetrieben werden. Er ist fest auf einer Rolle mit der Masse m_5 montiert und erfährt bei Rotation durch die Umgebungsluft ein konstantes Widerstandsmoment M_{Luft}. Alle Körper können als Starrkörper betrachtet werden und es kann angenommen werden, dass alle Körper und Seile schlupffrei aufeinander abrollen. Die gesamten Massen bzw. Massenträgheitsmomente der Stufenrollen 2 und 4 sind durch m_2, Θ_2 und m_4, Θ_4 gegeben. Alle Massenträgheitsmomente beziehen sich auf die jeweiligen Körperschwerpunktsachsen.



a)
Tragen Sie im nachfolgenden Bild sämtliche fehlenden Kräfte und Momente ein (inkl. Trägheitskräften und -momenten gemäß dem Prinzip von d'Alembert).

Hinweis: Die Massenträgheitsmomente sollen hier nicht näher spezifiziert werden und die Lagersymbole müssen nicht freigeschnitten werden. **(2,5 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

Hinweis: In den nachfolgenden Aufgabenteilen sollen die unbekannten Seilkräfte S_i nicht näher spezifiziert werden.

Geben Sie die Impulsbilanz (Kräftesatz) der Masse 1 bzgl. der x_1-Koordinate an.
(**0,5 Punkte**)

$$m_1\,\ddot{x}_1 = m_1\,g - S_1$$

Geben Sie die Drehimpulsbilanz (Drallsatz) der Rolle 2 bzgl. ihres Momentanpols und der φ_2-Koordinate an. (**1,0 Punkte**)

$$[\Theta_2 + m_2\,R_2^2]\;\ddot{\varphi}_2 = -m_2\,g\,R_2 + S_3\,[r_2 + R_2] - S_1\,2\,R_2$$

oder

$$\Theta_2\,\ddot{\varphi}_2 = -m_2\,g\,R_2 + m_2\,\ddot{x}_2\,R_2 + S_3\,[r_2 + R_2] - S_1\,2\,R_2 \quad \text{mit} \quad \ddot{x}_2 = -\ddot{\varphi}_2\,R_2$$

Geben Sie die gemeinsame Drehimpulsbilanz (Drallsatz) der Rolle 5 und des Propellers bzgl. ihres Schwerpunktes und der φ_5-Koordinate an. Spezifizieren Sie Θ_5 mittels der gegebenen Größen. (**1,0 Punkte**)

$$\left[\tfrac{1}{2}\,m_5\,r_5^2 + \Theta_{\text{Prop}}\right]\;\ddot{\varphi}_5 = S_4\,r_5 - M_{\text{Luft}}$$

b)
Geben Sie die (Winkel-)Geschwindigkeiten $\dot{x}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\dot{\varphi}_4$, $\dot{\varphi}_5$ in Abhängigkeit von $\dot{\varphi}_3$ an. (**2,0 Punkte**)

$$\dot{x}_1\,(\dot{\varphi}_3) = -2\,R_2\,\dot{\varphi}_2 = -2\,R_2\,\frac{r_3}{R_2 + r_2}\,\dot{\varphi}_3$$

$$\dot{\varphi}_2\,(\dot{\varphi}_3) = \frac{r_3}{R_2 + r_2}\,\dot{\varphi}_3$$

$$\dot{\varphi}_4\,(\dot{\varphi}_3) = -\frac{r_3}{r_4}\,\dot{\varphi}_3$$

$$\dot{\varphi}_5\,(\dot{\varphi}_3) = \frac{R_4}{r_5}\,\dot{\varphi}_4 = -\frac{R_4}{r_5}\,\frac{r_3}{r_4}\,\dot{\varphi}_3$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)
Als alternativer Antrieb wird ein Elektromotor eingesetzt. Die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ des Propellers (Außendurchmesser d_{Prop}) kann damit (aus der Ruhelage, von $\varphi_0 = 0$ ausgehend) durch die Funktion $\ddot{\varphi}(\varphi) = c_{\mathrm{M}}\, e^{-\varphi}$ (konstante Motorkennzahl $c_{\mathrm{M}} > 0$) beschrieben werden.

Bestimmen Sie die Funktion der tangentialen Geschwindigkeit an den Blattspitzen $v_\varphi(\varphi)$. **(2,0 Punkte)**

$$v_\varphi(\varphi) = \frac{d_{\mathrm{Prop}}}{2} \sqrt{2\, c_{\mathrm{M}}\, [1 - e^{-\varphi}]}$$

Aus Sicherheitsgründen darf die tangentiale Geschwindigkeit an den Blattspitzen höchstens $v_{\max}$ betragen. Geben Sie an welche Bedingung für c_{M} gelten muss, damit $v_{\max}$ <u>im Dauerbetrieb</u> nicht überschritten wird. **(1,0 Punkte)**

$$c_{\mathrm{M}} \leq \frac{1}{2} \left[\frac{v_{\max}}{\frac{d_{\mathrm{Prop}}}{2}} \right]^2 = 2 \left[\frac{v_{\max}}{d_{\mathrm{Prop}}} \right]^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

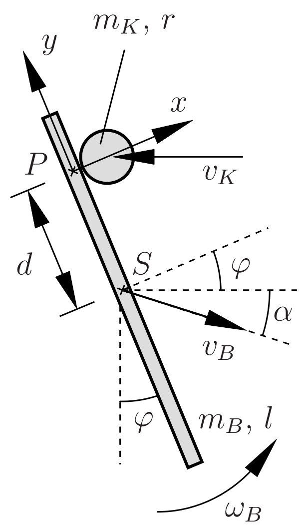
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)
Ein Balken (Masse m_B, Länge l, Schwerpunkt S) rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω_B und bewegt sich mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit v_B in der Ebene. Eine sich mit Geschwindigkeit v_K horizontal bewegende Kreisscheibe (Masse m_K, Radius r) stößt im Punkt P gegen den Balken, der zu diesem Zeitpunkt um den Winkel φ zur Senkrechten gedreht ist. Nehmen Sie beim Stoß zwischen den ideal glatten Körpern die Stoßzahl e an.



Bestimmen Sie die Komponenten der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_P = v_{P,x}\,\boldsymbol{e}_x + v_{P,y}\,\boldsymbol{e}_y$ im Stoßpunkt P für den Balken.

(1,5 Punkte)

$$v_{P,x} = \cos(\alpha+\varphi)\,v_B - d\,\omega_B$$

$$v_{P,y} = -\sin(\alpha+\varphi)\,v_B$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Geben Sie sämtliche Gleichungen zur eindeutigen Berechnung der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}}_B = \bar{v}_{B,x}\,\boldsymbol{e}_x + \bar{v}_{B,y}\,\boldsymbol{e}_y$ und der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}_B$ des Balkens sowie der Geschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}}_K = \bar{v}_{K,x}\,\boldsymbol{e}_x + \bar{v}_{K,y}\,\boldsymbol{e}_y$ und der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}_K$ der Kreisscheibe nach dem Stoß an.
Hinweis: Beziehen Sie sich auf die in der Zeichnung gegebenen Größen. Die Gleichungen sollen nicht gelöst werden. **(4,0 Punkte)**

Impulsbilanzen Kugel:

$m_K\,[-\cos(\varphi)\,v_K - \bar{v}_{K,x}] = -\hat{F}$

$m_K\,[\sin(\varphi)\,v_K - \bar{v}_{K,y}] = 0$

Drehimpulsbilanz Kugel:

$\frac{1}{2}\,m_K\,r^2\,[\bar{\omega}_K - \omega_K] = 0$

Impulsbilanzen Balken:

$m_B\,[\cos(\alpha+\varphi)\,v_B - \bar{v}_{B,x}] = \hat{F}$

$m_B\,[\sin(\alpha+\varphi)\,v_B + \bar{v}_{B,y}] = 0$

Drehimpulsbilanz Balken:

$\frac{1}{12}\,m_B\,l^2\,[\bar{\omega}_B - \omega_B] = d\,\hat{F}$

Stoßgleichung: $e = -\dfrac{\bar{v}_{P,x} - \bar{v}_{K,x}}{v_{P,x} - \cos(\varphi)\,v_K}$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

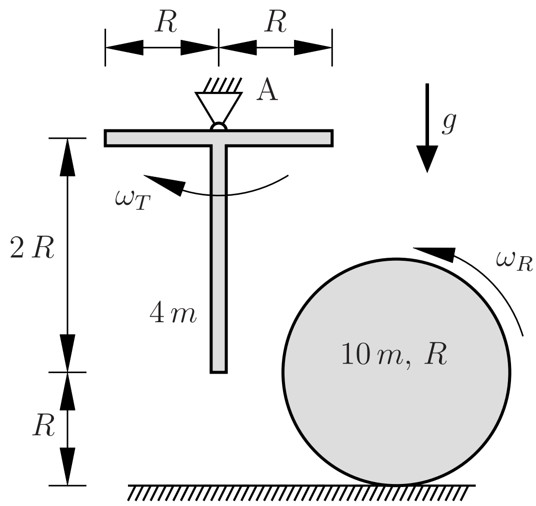
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

c)
Eine Kreisscheibe (Masse $10\,m$, Radius R) rollt (Winkelgeschwindigkeit ω_R) im Schwerefeld der Erde schlupffrei ab und stößt gegen einen sich in Ruhe befindenden T-Träger ($\omega_T = 0$) mit der homogen verteilten Masse $4\,m$. Nehmen Sie beim Stoß zwischen den ideal glatten Körpern die Stoßzahl e an. Das Trägheitsmoment Θ_T^A des T-Träger bezüglich des Punktes A ist mit $\Theta_T^A = \dfrac{10}{3}\,m\,R^2$ bereits gegeben.



Die Drehimpulsbilanzen für das System wurden bereits bestimmt:

$$2\,R\,\hat{F} = \frac{10}{3}\,m\,R^2\,[\bar{\omega}_T - \omega_T]$$
$$-R\,\hat{F} = 15\,m\,R^2\,[\bar{\omega}_R - \omega_R]$$

Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit der Kreisscheibe vor dem Stoß ω_R, damit der T-Träger nach dem Stoß die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}_T$ aufweist und geben Sie die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}_R$ der Kreisscheibe nach dem Stoß an. Notieren Sie alle notwendigen Gleichungen. **(3,0 Punkte)**

notwendige Gleichung - Stoßgleichung:

$$e = -\frac{\bar{\omega}_R\,R - 2\,\bar{\omega}_T\,R}{\omega_R\,R}$$

$$\omega_R = \frac{19\,\bar{\omega}_T}{9\,[1+e]}$$

$$\bar{\omega}_R = \frac{18-e}{9\,[1+e]}\,\bar{\omega}_T$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau

Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

Welche Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}_T$ muss der T-Träger direkt nach dem Stoß in der dargestellten Lage haben, damit dieser einen Überschlag macht? Geben Sie auch den Abstand d_A des Schwerpunktes des T-Trägers vom Lager A an. **(1,5 Punkte)**

$d_A = \frac{1}{2}\,R$

$$\bar{\omega}_T = \sqrt{\frac{12\,g}{5\,R}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

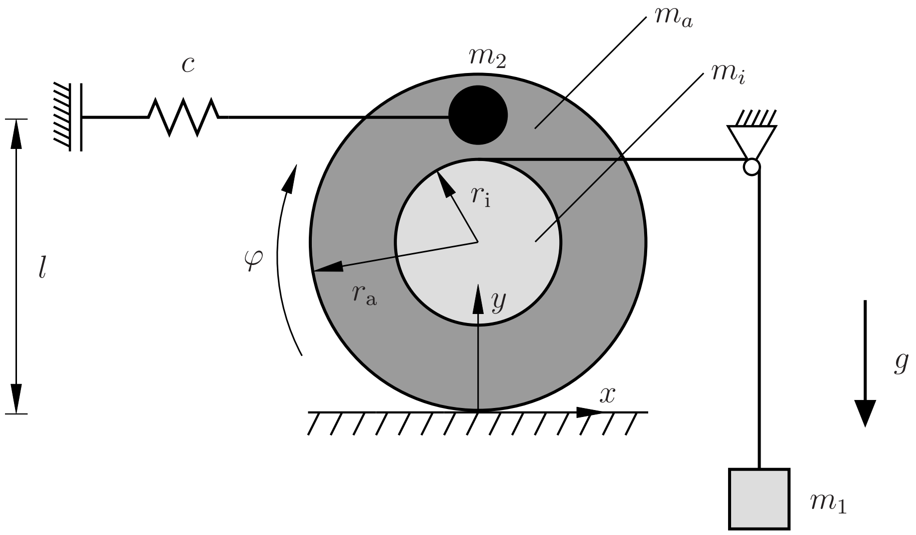
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

Eine Stufenrolle besteht aus zwei fest verbundenen Scheiben (Radien r_i und r_a, Massen m_i und m_a). Eine Punktmasse (Masse m_1) ist durch ein Seil über eine Umlenkrolle mit der kleinen Scheibe verbunden, wobei das Seil auf der Scheibe aufgerollt und stets gespannt ist. Zusätzlich befindet sich eine zweite Punktmasse (Masse m_2) auf der großen Scheibe und ist mit einer Feder (Federsteifigkeit c) verbunden. Die Feder ist in der dargestellten Lage ungespannt und das System befindet sich im Schwerefeld der Erde.



a)

Geben Sie die Koordinaten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}_2$ von der Punktmasse m_2 bezüglich des gegebenen Koordinatensystems an. **(1,5 Punkte)**

$$\boldsymbol{r}_2 = [r_a\,\varphi + (l - r_a)\sin(\varphi)]\,\boldsymbol{e}_x + [r_a + (l - r_a)\cos(\varphi)]\,\boldsymbol{e}_y$$

Geben Sie die Komponenten der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_2$ von der Punktmasse m_2 bezüglich des gegebenen Koordinatensystems an. **(1,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{v}_2 = [r_a\,\dot{\varphi} + (l - r_a)\cos(\varphi)\,\dot{\varphi}]\,\boldsymbol{e}_x + [(r_a - l)\sin(\varphi)\,\dot{\varphi}]\,\boldsymbol{e}_y$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

b)

Bestimmen Sie die kinetische Energie E_{kin} des gesamten Systems in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_2$ der Punktmasse m_2.
Hinweis: Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_2$ ist hier als gegeben anzusehen. **(2,0 Punkte)**

$$E_{\text{kin}} = \frac{m_1}{2}\,(r_a + r_i)^2\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m_i}{2} r_i^2 + \frac{m_a}{2} r_a^2 + (m_i + m_a)\,r_a^2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{m_2}{2}\,\|\boldsymbol{v}_2\|^2$$

c)

Für ein anderes, nicht näher spezifiziertes, System ergeben sich die Energien sowie die nichtkonservativen Kräfte zu

$$\begin{aligned}
E_{\text{pot}} &= m\,g\,l\,[1 - \cos(\phi)] + c\,l^2\,\sin(\phi)^2\ , \\
E_{\text{kin}} &= m\,l^2\,\dot{\phi}^2\ , \\
Q_F &= F_0\,l\,\cos(\Omega\,t)\ , \\
Q_D &= -d\,l^2\,\dot{\phi}\ .
\end{aligned}$$

Geben Sie die Bewegungs-Differentialgleichung bezüglich des Drehwinkels ϕ für große Auslenkungen des Systems an. **(2,0 Punkte)**

$$2\,m\,l^2\,\ddot{\phi} + m\,g\,l\sin(\phi) + 2\,c\,l^2\sin(\phi)\cos(\phi) = F_0\,l\cos(\Omega\,t) - d\,l^2\,\dot{\phi}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

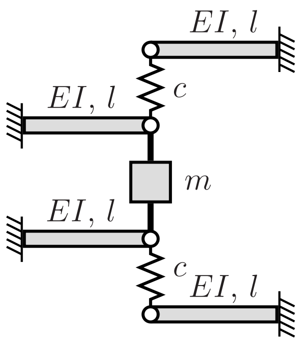
Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

Geben Sie die linearisierte Form der vorher bestimmten Bewegungs-Differentialgleichung für kleine Auslenkungen um die Ausgangslage ($\phi = 0$, $\dot{\phi} = 0$, $\ddot{\phi} = 0$) an. **(1,0 Punkte)**

$$2\,m\,l^2\,\ddot{\phi} + d\,l^2\,\dot{\phi} + (m\,g\,l + 2\,c\,l^2)\,\phi = F_0\,l\cos(\Omega\,t)$$

d)

Das dargestellte System besteht aus zwei Federn (Federsteifigkeit jeweils c) und vier dehnstarren Balken (Biegesteifigkeit jeweils EI, Länge jeweils l). Die Masse m ist über zwei starre masselose Stäbe mit den Balkenenden verbunden.



Berechnen Sie die aus den Federn und den Balken resultierende Ersatzfedersteifigkeit c^{ers} bezüglich der vertikalen Verschiebung der Masse. **(2,0 Punkte)**

$$c^{\mathrm{ers}} = 2\left[\frac{3\,EI}{l^3} + \frac{1}{\dfrac{l^3}{3\,EI} + \dfrac{1}{c}}\right]$$

Bestimmen Sie die zugehörige Eigenkreisfrequenz ω_0 des Systems. **(0,5 Punkte)**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^{\mathrm{ers}}}{m}}$$