TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

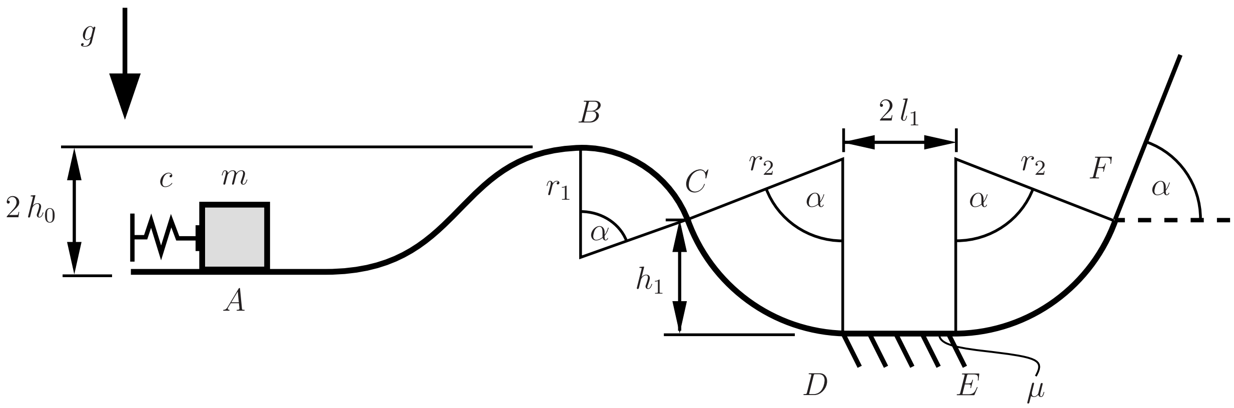
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)



Eine Punktmasse m liegt in Punkt A an einer vorgespannten Feder (Federsteifigkeit c). Die Bahn beschreibt zwischen den Punkten B und C, C und D und E und F jeweils eine Kreisbahn. Zwischen den Punkten D und E gilt der Gleitreibungskoeffizient μ, die Bahn ist ansonsten reibfrei. Das System befindet sich im Schwerefeld der Erde. Die Punktmasse hat durchgehend Kontakt mit der Bahn.

Bestimmen Sie die minimale Vorspannung der Feder Δl_c, so dass die Punktmasse den Punkt B erreicht. **(1,0 Punkte)**

$$\Delta l_c = \sqrt{\frac{4h_0\, m\, g}{c}}$$

Gehen Sie davon aus, dass die Punktmasse den Punkt B mit der Geschwindigkeit $v_B > 0$ erreicht. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_D der Punktmasse im Punkt D. **(1,0 Punkte)**

$$v_D = \sqrt{v_B^2 + 2\, g\, \left[1 h_1 + r_1\, [1 - \cos(\alpha)]\right]}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

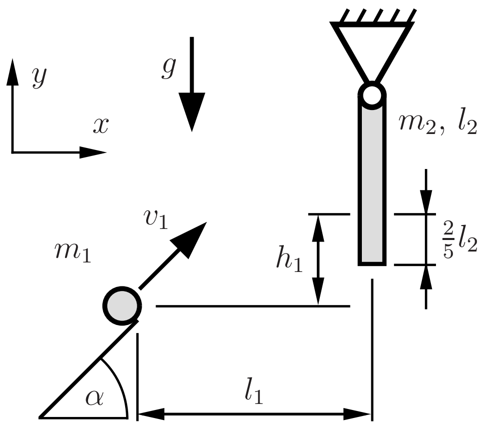
Im Folgenden ist die Geschwindigkeit $v_C > 0$ der Punktmasse im Punkt C als bekannt zu betrachten und groß genug, dass die Punktmasse den Punkt F überschreitet. Bestimmen Sie die maximale Bahnlänge l_{end} welche die Punktmasse über den Punkt F hinaus erreichen kann. **(1,0 Punkte)**

$$l_{\text{end}} = \frac{\frac{1}{2}v_C^2 - 2l_1\,\mu\,g}{\sin(\alpha)g}$$

Die Punktmasse passiert den Punkt D das erste Mal mit der Geschwindigkeit $v_D = 10\,\text{m/s}$. Zusätzlich sind die Größen $g = 10\,\text{m/s}^2$, $\mu = 1$ und $l_1 = 1\,\text{m}$ gegeben. Es gelte die Annahme, dass die Masse im weiteren Verlauf den Punkt B nicht mehr überschreitet. Wie oft passiert die Masse den Bereich zwischen D und E vollständig, bis sie darin zum Stillstand kommt? **(1,0 Punkte)**

$$i^* = \frac{v_D^2}{2\,2l_1\ u_0\,g} = 2,5$$
$$\Rightarrow \quad i = 2$$

b)
Im rechts dargestellten System wird die Punktmasse m_1 über eine Rampe geschossen, verlässt diese mit der Geschwindigkeit v_1 und trifft auf einen gelagerten Stab. Die Breite des Stabes ist zu vernachlässigen, seine Länge ist l_2 und seine Masse m_2 ist homogen verteilt. Der reibungsfreie Stoß erfolgt bei $\frac{2}{5}$ der Stablänge. Das System befindet sich im Schwerefeld der Erde.



Bestimmen Sie die Zeitspanne t^* bis zum Aufprall und die Höhe h_1, in der die Masse auf den Stab trifft. **(1,0 Punkte)**

$$t^* = \frac{l_1}{v_1\cos(\alpha)}$$

$$h_1 = v_1\,\sin(\alpha)\,t^* - \frac{1}{2}g\,t^{*2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

Bestimmen Sie die Komponenten der Geschwindigkeit $\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \tilde{v}_{1x}\boldsymbol{e}_x + \tilde{v}_{1y}\boldsymbol{e}_y$ der Punktmasse m_1 unmittelbar vor dem Aufprall mit dem Stab. **(1,0 Punkte)**

$$\tilde{v}_{1x} = v_1 \cos(\alpha)$$

$$\tilde{v}_{1y} = v_1 \sin(\alpha) - g\,t^*$$

Bestimmen Sie den zur Horizontalen gemessenen Aufprallwinkel β. **(0,5 Punkte)**

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{\tilde{v}_{1y}}{\tilde{v}_{1x}}\right)$$

Die Geschwindigkeiten der Punktmasse unmittelbar vor dem Stoß können nun als $\tilde{v}_{1x}$ und $\tilde{v}_{1y}$ angenommen werden. Der Stoß erfolgt vollplastisch. Bestimmen Sie die translatorischen Geschwindigkeiten der Punktmasse und des Stab-Schwerpunkts unmittelbar nach dem Stoß. **(3,5 Punkte)**

$$\overline{v}_{1x} = \frac{\tilde{v}_{1x} m_1}{m_1 + \frac{6}{5} m_2} \qquad \overline{v}_{2x} = \frac{6}{5}\overline{v}_{1x}$$

$$\overline{v}_{1y} = \tilde{v}_{1y} \qquad \overline{v}_{2y} = 0$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

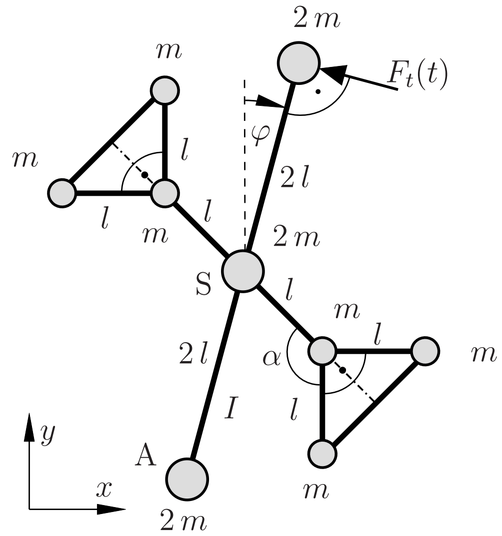
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

Das abgebildete System (punktsymmetrisch zum Schwerpunkt S) besteht aus einem starren Verbund von masselosen Balken sowie Punktmassen. An den kürzeren Balken mit der Länge l sind Dreiecke, bestehend aus drei Punktmassen, angebracht. Der Winkel zwischen dem kürzeren Balken und den Katheten des Dreiecks beträgt $\alpha = 135°$. Das System wird durch eine von der Zeit t abhängige Kraft $F_t(t)$, die immer senkrecht zu dem längeren Balken (Länge $2\,l$) angreift, belastet. Die Verdrehung des längeren Balkens zur y-Achse sei durch φ beschrieben.



a)
Bestimmen Sie die Beschleunigung des Schwerpunktes S für die dargestellte Lage zum Zeitpunkt $t^\star$. **(1,0 Punkte)**

$$12\,m\,\ddot{x}_S = -F_t(t^\star)\,\cos\varphi$$

$$12\,m\,\ddot{y}_S = F_t(t^\star)\,\sin\varphi$$

b)
Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment θ_S des Systems bezogen auf seinen Schwerpunkt S. Die an den kürzeren Balken angebrachten Dreiecke weisen bezogen auf ihren Schwerpunkt ein Massenträgheitsmoment von jeweils $\theta_\mathrm{D} = \frac{4}{3}\,m\,l^2$ auf.
Hinweis: Fassen Sie auftretende Terme nicht zusammen. **(2,0 Punkte)**

$$\theta_\mathrm{S} = \left[26 + 4\sqrt{2}\right]\,m\,l^2$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

c)
Die Beschleunigungskomponenten des Schwerpunkts ($\ddot{x}_S$, $\ddot{y}_S$, $\ddot{z}_S = 0$) als auch Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$, Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und Auslenkung φ können nun als bekannt angenommen werden. Geben Sie unter Berücksichtigung dieser Vorraussetzungen die Beschleunigung des Punktes A an.
Hinweis: Fassen Sie auftretende Terme nicht zusammen. **(2,0 Punkte)**

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_S \\ \ddot{y}_S \\ \ddot{z}_S = 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ddot{\varphi} \end{bmatrix} \times 2\,l \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} \times 2\,l \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

d)
Die Funktion der angreifenden Kraft sei gegeben als $F_t(t) = 3\,F\,\exp(-k\,t)$. Bestimmen Sie jetzt die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$, die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und die Auslenkung φ in Abhängigkeit der Zeit t. Nehmen Sie dazu an, dass sich das System zu Beginn ($t = 0$) in Ruhe befindet und initial nicht ausgelenkt ist. Das Massenträgheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt θ_S sei bekannt. **(2,5 Punkte)**

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{6\,F\,l}{\theta_S}\,e^{-k\,t}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{6\,F\,l}{k\,\theta_S}\,[e^{-k\,t} - 1]$$

$$\varphi(t) = -\frac{6\,F\,l}{k^2\,\theta_S}\,[e^{-k\,t} + k\,t - 1]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

e)
Die Beschleunigung des Punktes A sei durch $a_x > 0$ und $a_y > 0$ (beide in positive x-y-Koordinatenrichtung wirkend) vorgegeben. Bestimmen Sie die Beträge der Normalkraft N_I und der Querkraft Q_I in Balken I für die dargestellte Auslenkung φ. Handelt es sich bei N_I um eine Zugkraft oder Druckkraft? **(2,5 Punkte)**

$$|N_I| = |2\,m\,[a_x\,\sin(\varphi) + a_y\,\cos(\varphi)]|$$

$$|Q_I| = |2\,m\,[a_x\cos(\varphi) - a_y\,\sin(\varphi)]|$$

N_I ist eine Zugkraft.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

a)
Für ein nicht näher spezifiziertes System mit einem Freiheitsgrad x sind die potentielle und kinetische Energie sowie die virtuelle Arbeit externer Lasten mit

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin}}(x) &= \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2 + 3\, M\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\, \Theta \left[\frac{\dot{x}}{l}\right]^2 , \\
E_{\text{pot}}(x) &= \frac{3}{2}\, m\, g\, [x - l] + 3\, c\, x^2 , \\
\delta W &= F_0 \sin(\Omega\, t)\, \delta x
\end{aligned}
$$

gegeben. Stellen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung des Systems bezüglich x auf. **(2,0 Punkte)**

$$
-\frac{3}{2}\, m\, g - 6\, c\, x - m\, \ddot{x} - 6\, M\, \ddot{x} - \frac{\Theta}{l^2}\, \ddot{x} = -F_0\, \sin(\Omega\, t)
$$

$$
\ddot{x} + \frac{6\, c\, l^2}{m\, l^2 + 6\, M\, l^2 + \Theta}\, x = \frac{F_0\, \sin(\Omega\, t) + \frac{3}{2}\, m\, g}{m\, l^2 + 6\, M\, l^2 + \Theta}\, l^2
$$

Bestimmen Sie die Erregerfrequenz Ω, bei der für dieses System der Resonanzfall eintritt. **(1,0 Punkte)**

$$
\Omega = \sqrt{\frac{6\, c\, l^2}{m\, l^2 + 6\, M\, l^2 + \Theta}}
$$

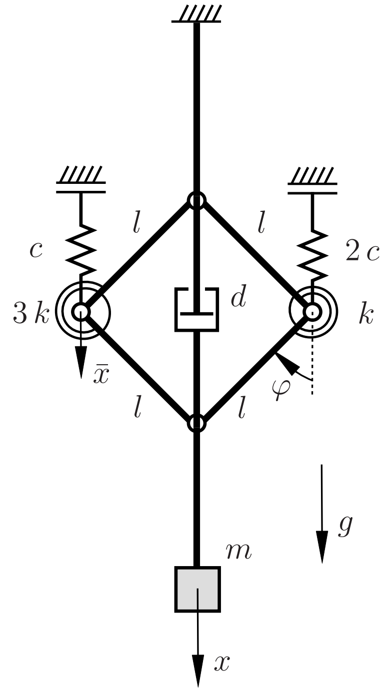
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

Das dargestellte System besteht aus starren Stangen der Länge l, an deren Verbindungsgelenken teilweise Drehfedern der Steifigkeiten $3\,k$ bzw. k angebracht sind. Zusätzlich wird das System von zwei vertikal angebrachten Federn der Steifigkeiten c bzw. $2\,c$ und einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante d gestützt. An der unteren vertikalen Stange ist eine Punktmasse m angebracht. Im unausgelenkten Zustand $\varphi = 45°$ sind die Federn entspannt.
Hinweis: Im Folgenden ist die Kinematik für große Auslenkungen zu berücksichtigen.



b)
Geben Sie die Geschwindigkeiten $\dot{x}$ sowie $\dot{\bar{x}}$ als Funktionen der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und des Winkels φ an. **(1,5 Punkte)**

$$\dot{x}(\dot{\varphi},\varphi) = -2\,l\,\sin(\varphi)\,\dot{\varphi}$$

$$\dot{\bar{x}}(\dot{\varphi},\varphi) = -l\,\sin(\varphi)\,\dot{\varphi}$$

Bestimmen Sie die Funktion der virtuellen Arbeit δW aller nicht konservativen Kräfte des Systems in Abhängigkeit der Koordinate φ. **(1,0 Punkte)**

$$\delta W = -4\,d\,l^2\,\sin^2(\varphi)\,\dot{\varphi}\,\delta\varphi$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

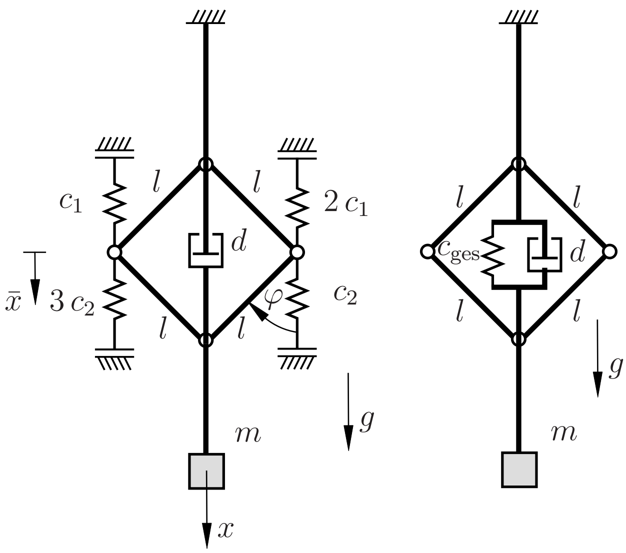
Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

Berechnen Sie die Funktionen der potentiellen sowie der kinetischen Energien E_{pot} und E_{kin} bezüglich der Koordinaten x, $\bar{x}$, und φ. **(2,5 Punkte)**

$$E_{\text{pot}} = 2\,k\,\left[2\,\left[\varphi - \frac{\pi}{4}\right]\right]^2 + \frac{3}{2}\,c\,\bar{x}^2 - m\,g\,x$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2$$

Im Folgenden soll das nebenstende System betrachtet werden. Das System unterscheidet sich zu dem vorherigen lediglich darin, dass die Drehfedern durch horizontal ausgerichtete Wegfedern ersetzt worden sind. Die Federn weisen jeweils in der Abbildung angegebenen Werte auf.



c)
Geben Sie die Ersatzfedersteifigkeit c_{ges} aller Federn bezüglich des rechts daneben gegebenen Ersatzsystems an. Ermitteln Sie c_2 in Abhängigkeit von c_1 sodass die gesamten Steifigkeiten auf beiden Seiten des Systems identisch sind. **(2,0 Punkte)**

$$c_{\text{ges}}(c_1, c_2) = 3\,c_1 + 4\,c_2$$

$$c_2(c_1) = \frac{1}{2}\,c_1$$