TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

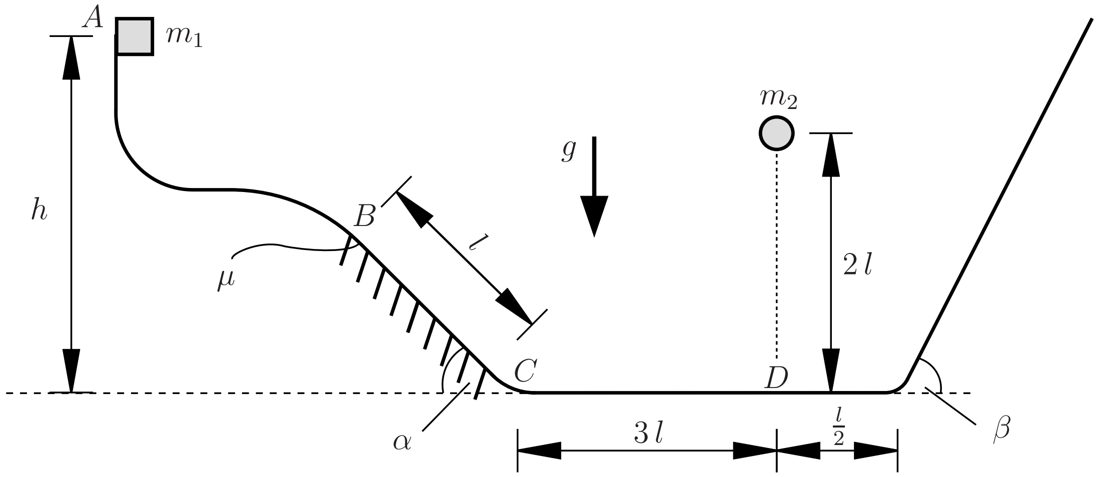
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Eine Punktmasse m_1 wird in Punkt A aus einer Höhe h aus der Ruhelage losgelassen. Die Bahn, zu welcher der Körper stets Kontakt besitzt, ist auf der schiefen Ebene ($\alpha = 45°$) zwischen den Punkten B und C reibungsbehaftet (Gleitreibungskoeffizient $\mu = 0{,}1$) und in allen anderen Bereichen reibungsfrei. Die zweite schiefe Ebene weist einen Winkel $\beta = 60°$ auf.



a)
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_C der Punktmasse im Punkt C. **(1,0 Punkte)**

$$v_C = \sqrt{2\,g[h - \cos(\alpha)\,\mu\,l]}$$

b)
Die Punktmasse passiert nun Punkt C mit der Geschwindigkeit $v_C = \sqrt{g(2\,h - \frac{3}{20}l)}$ und es wird zeitgleich eine zweite Punktmasse m_2 aus einer Höhe $2\,l$ senkrecht über Punkt D aus der Ruhelage fallen gelassen. Bestimmen Sie die Höhe h so, dass sich beide Punktemassen in Punkt D treffen. **(2,0 Punkte)**

$$h = \frac{\frac{9}{4}l + \frac{3}{20}l}{2} = 1,2\,l$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

c)
Die Punktmasse m_1 wurde nun aus einer anderen Höhe in Punkt A losgelassen und passiert mit Geschwindigkeit v_C Punkt C. Bestimmen Sie den Weg, welchen die Punktmasse m_1 von Punkt C aus zurücklegt, wenn diese zunächst die rechte schiefe Ebene hinaufrutscht und sich anschließend erneut an Punkt D befindet.
Geben Sie die Lösung in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v_C an, ohne diese näher zu spezifizieren. **(2,0 Punkte)**

Gesamtweg $w_g = 4\,l + \dfrac{v_C^2}{g\,\sin(\beta)}$

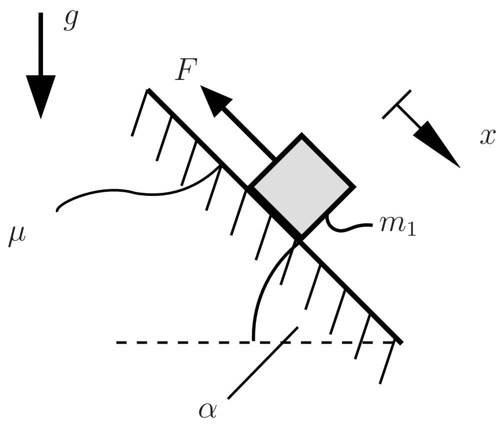
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

Nehmen Sie an, dass eine Punktmasse mit Masse $m_1 = 2\,m$, wie im System rechts dargestellt, auf einer schiefen ($\alpha = 45°$) und reibungsbehafteten ($\mu = 0{,}1$) Ebene **zum Stillstand gekommen** ist. Des Weiteren greift an der Punktmasse eine konstante Kraft F an.



d)
Berechnen Sie die Beschleunigung der Punktmasse m_1. Beachten Sie dabei die Fallunterscheidung, ob die Punktmasse nach oben oder unten rutscht und nutzen Sie das vorgegebene Koordinatensystem. **(2,0 Punkte)**

Masse rutscht nach oben: $a_x = g[\sin(\alpha) + \mu\,\cos(\alpha)] - \frac{F}{2\,m}$

Masse rutscht nach unten: $a_x = g[\sin(\alpha) - \mu\,\cos(\alpha)] - \frac{F}{2\,m}$

Wie groß muss die Kraft F mindestens sein, damit eine negative Beschleunigung vorliegt? **(1,0 Punkte)**

$F_{\min} > 2\,mg[\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)]$

Was passiert nun bezogen auf die Bewegung der Masse, wenn die Kraft $F = \frac{3}{2}\,m\,g$ beträgt? Begründen Sie mit einer Rechnung! **(2,0 Punkte)**

$a_{x,1} = g[\frac{11\sqrt{2}}{20}] - \frac{3}{4}\,g \approx 0{,}03\,g$
$a_{x,2} = g[\frac{9\sqrt{2}}{20}] - \frac{3}{4}\,g \approx -0{,}11\,g$

Einsetzen der Kraft führt jeweils zu Beschleunigung in die entgegengesetze Richtung wie angenommen $\Rightarrow$ Die Masse überwindet die Haftreibung nicht und bewegt sich somit gar nicht

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

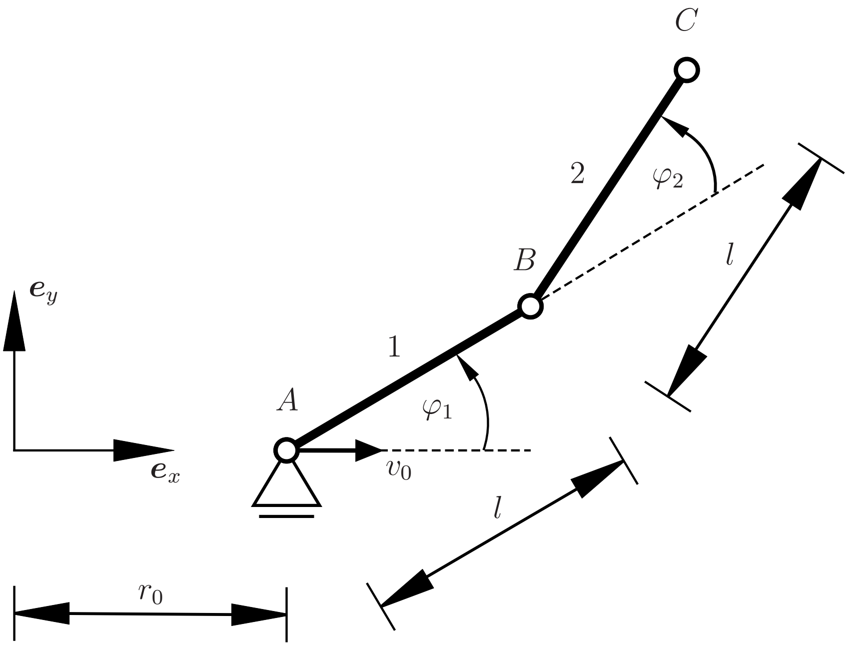
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

Das gegebene System besteht aus zwei gelenkig in Punkt B miteinander verbundenen starren Stäben 1 und 2, welche jeweils die Länge l aufweisen. Stab 1 ist in Punkt A mit einem Lager verbunden, welches eine konstante Geschwindigkeit v_0 in $\boldsymbol{e}_x$-Richtung aufweist. Die Stäbe weisen darüber hinaus konstante Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 auf. Beschrieben wird das System über das gegebene raumfeste x-y-Koordinatensystem.



a)
Bestimmen Sie die Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}_C = r_{C_x}\boldsymbol{e}_x + r_{C_y}\boldsymbol{e}_y$ des Punktes C im gegebenen raumfesten x-y-Koordinatensystem in Abhängigkeit der Winkel φ_1 und φ_2 und der Zeit t. **(4,0 Punkte)**

$$r_{C_x} = r_0 + v_0\,t + \hat{l}\,\cos(\varphi_1) + \hat{l}\,\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$r_{C_y} = \hat{l}\,\sin(\varphi_1) + \hat{l}\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Alternativ:

$$r_{C_x} = r_0 + v_0\,t + \hat{l}\,\cos(\varphi_1) + \cos(\varphi_2)\,\hat{l}\,\cos(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)\,\hat{l}\sin(\varphi_1)$$

$$r_{C_y} = \hat{l}\,\sin(\varphi_1) + \cos(\varphi_2)\,\hat{l}\,\sin(\varphi_1) + \sin(\varphi_2)\,\hat{l}\,\cos(\varphi_1)$$

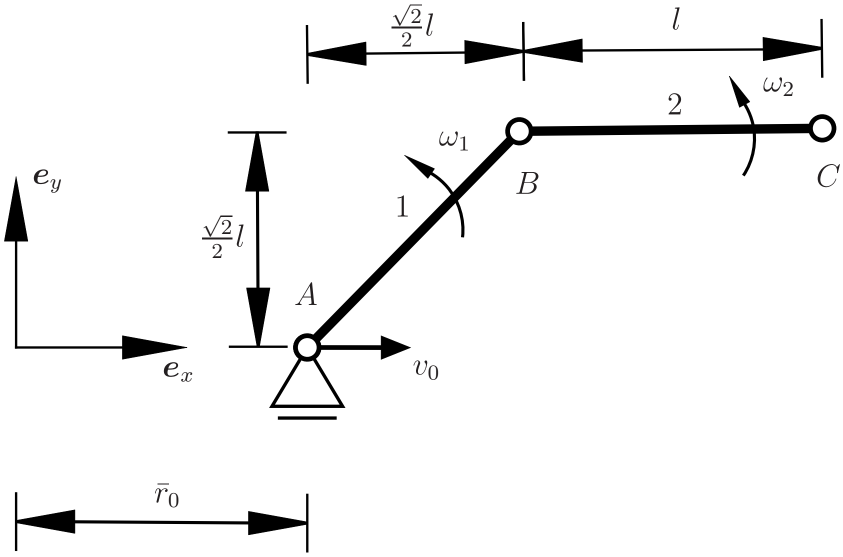
$$\hat{l} = l$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)



Dargestellt ist nun eine Momentaufnahme des obigen Systems. Der dargestellte Zustand entspricht den Winkeln $\varphi_1 = 45°$ und $\varphi_2 = -45°$. Die konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 sind als bekannt anzunehmen. Das Lager im Punkt A weist nach wie vor die konstante Geschwindigkeit v_0 in x-Richtung auf.

Berechnen Sie die Komponenten der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_C = v_{c_x}\boldsymbol{e}_x + v_{c_y}\boldsymbol{e}_y$ bezüglich des dargestellten globalen $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$-Koordinatensystems für die dargestellte Lage.

(3,0 Punkte)

$$v_{C_x} = v_0 - \omega_1\,\hat{l}\,\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v_{C_y} = \omega_1\,\hat{l}\,\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \hat{l}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\hat{l} = l$$

TU Dortmund

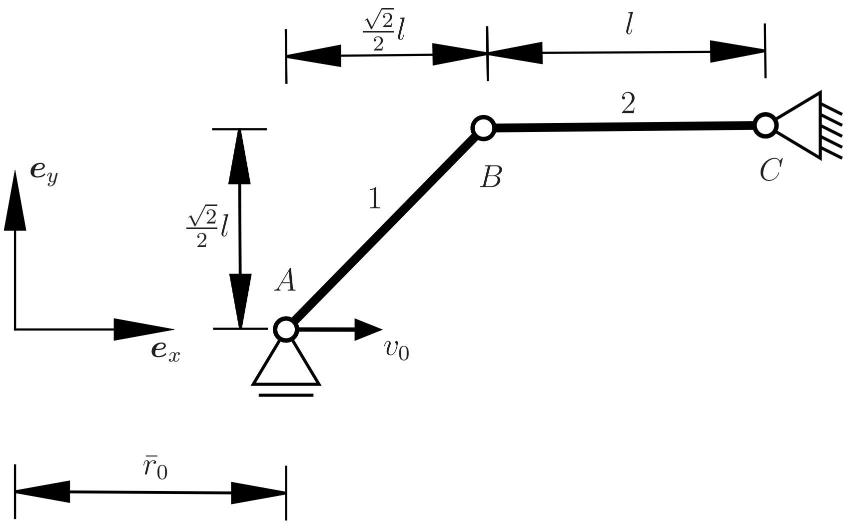
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

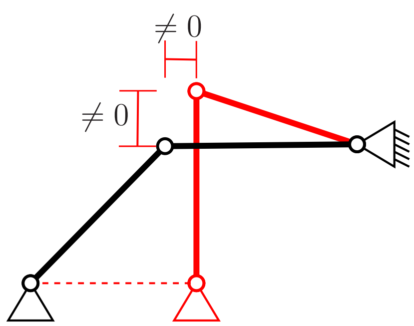


b)
Das System wurde nun wie dargestellt so modifiziert, dass sich an Punkt C ein Festlager befindet.
Bestimmen Sie die Lage $\boldsymbol{r}_\mathrm{M} = r^x_\mathrm{M}\boldsymbol{e}_x + r^y_\mathrm{M}\boldsymbol{e}_y$ des Momentanpols von Stab 1 zum dargestellten Zeitpunkt. **(1,0 Punkte)**

$r^x_\mathrm{M} = \bar{r}_0$

$r^y_\mathrm{M} = \frac{\sqrt{2}\,l}{2}\frac{3\sqrt{2}\,l}{2}$

Mit fortschreitender Zeit verschiebt sich das Lager in Punkt A immer mehr in $\boldsymbol{e}_x$-Richtung, weshalb sich auch die Lage des Gelenkes B und des Momentanpols verschiebt.
Zeichnen Sie die Lage des Systems, in welcher der Momentanpol von Stab 1 identisch ist mit der Position des Gelenkpunktes B. Nutzen Sie dafür, wie im nachfolgenden Kästchen dargestellt, die ursprüngliche Lage als Referenz. Geben Sie **keine** Längen an. **(2,0 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

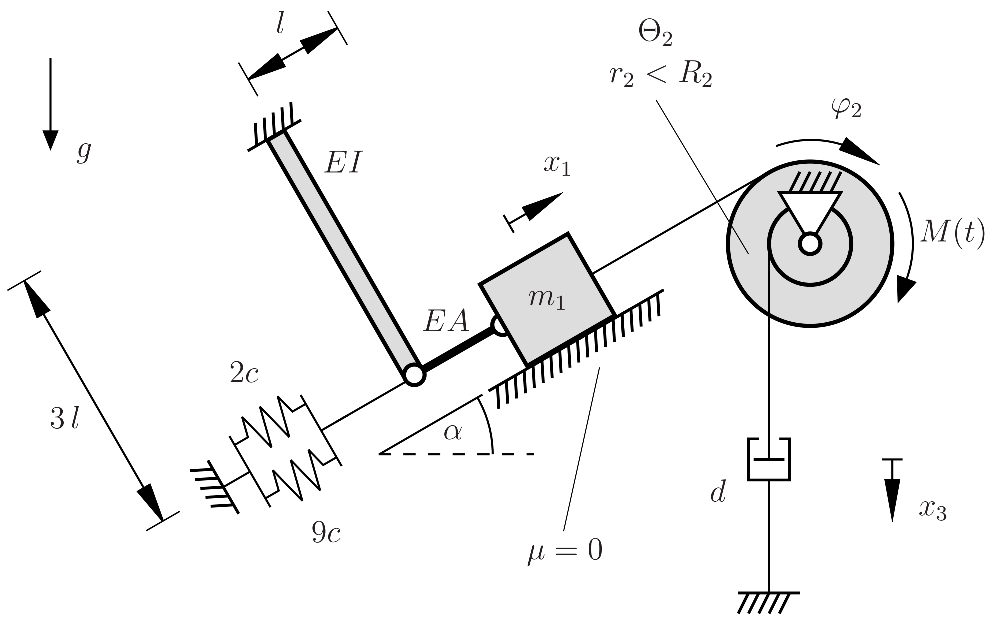
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

a)

Das unten dargestellte System besteht aus einem Federmechanismus, einem Dämpfer, einer Stufenrolle (Radien r_2, R_2; Massenträgheitsmoment im Schwerpunkt Θ_2) und einer Masse. Die Masse m_1 gleitet reibungsfrei auf der schiefen Ebene. Die Rolle wird durch einen Motor mit einem zeitabhängigen Moment $M(t)$ angetrieben. Die Seile seien dehnstarr und stets gespannt. Der Biegebalken und der Stab sind als masselos zu betrachten.



An der linken Seite des Systems befindet sich ein aus Biegebalken, Stab und Federn bestehender Federmechanismus. Bestimmen Sie die Ersatzfedersteifigkeit $\bar{c}$ für diesen Mechanismus. Fassen Sie die Terme nicht zusammen. **(1,5 Punkte)**

$$\bar{c} = \left[\frac{1}{11\,c + \dfrac{EI}{9\,l^3}} + \frac{l}{EA} \right]^{-1}$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

b)

Geben Sie für die kinematischen Bindungen des Systems die Geschwindigkeiten $\dot{x}_1$ und $\dot{x}_3$ in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_2$ an. **(1,0 Punkte)**

$$\dot{x}_1(\dot{\varphi}_2) = \dot{\varphi}_2 \, R_2$$

$$\dot{x}_3(\dot{\varphi}_2) = -\dot{\varphi}_2 \, r_2$$

Geben Sie die kinetische Energie E_{kin}, die potentielle Energie E_{pot} sowie die virtuelle Arbeit δW der nichtkonservativen Lasten des Systems bzgl. der Koordinate φ_2 an. **(3,0 Punkte)**

Hinweis: Rechnen Sie bitte mit $\bar{c}$ als Ersatzfedersteifigkeit für den Federmechanismus weiter und setzen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil a) nicht ein.

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \, m_1 \, [\dot{\varphi}_2 \, R_2]^2 + \frac{1}{2} \, \Theta_2 \, \dot{\varphi}_2^2$$

$$E_{\text{pot}} = m_1 \, g \, \varphi_2 \, R_2 \, \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \, \bar{c} \, [\varphi_2 \, R_2]^2$$

$$\delta W = [M(t) - d \, \dot{\varphi}_2 \, r_2^2] \, \delta\varphi_2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

c)

Für ein anderes System sei die Bewegungsgleichung bereits zu

$$-7\,\theta\,\cos^2(\psi)\,\ddot{\psi} + \frac{5}{16}\,\hat{c}\,\psi + \frac{1}{2} m\,a^2\,\ddot{\psi} - \frac{9}{5}\,m\,g\,l\,\sin(\psi) = 0$$

bestimmt worden. Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung um die Ausgangslage ($\psi_0 = 0$, $\dot{\psi}_0 = 0$, $\ddot{\psi}_0 = 0$) des zugrunde liegenden Systems. **(1,0 Punkte)**

$$\boxed{-7\,\theta\,\ddot{\psi} + \frac{5}{16}\,\hat{c}\,\psi + \frac{1}{2} m\,a^2\,\ddot{\psi} - \frac{9}{5}\,m\,g\,l\,\psi = 0}$$

d)

Für ein weiteres System sei die Bewegungsgleichung

$$3\,m\,\ddot{x} + \frac{2}{7}\,[d_1 + 2\,d_2]\,\dot{x} + [2\,c_1 + 3\,c_2]\,x = 0$$

bereits ermittelt worden und zum Zeitpunkt $t = 0$ seien des Weiteren die Anfangsbedingungen

$$x_0 = x(t=0) = 0, \qquad \dot{x}_0 = \dot{x}(t=0) = v_0$$

bekannt. Die Federkonstanten c_1, c_2 und die Dämpferkonstanten d_1, d_2 wurden deart gewählt, dass starke Dämpfung vorliegt.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Lösen Sie die Differentialgleichung. Notieren Sie wichtige Zwischenschritte im Kästchen. **(2,5 Punkte)**

Hinweis: Stellen Sie sicher, dass alle im Ergebnis verwendeten Größen spezifiziert sind!

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{2}{21\,m}\,[d_1 + 2\,d_2]\,\dot{x} + \frac{2\,c_1 + 3\,c_2}{3\,m}\,x = 0$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{21\,m}\,[d_1 + 2\,d_2], \qquad \omega = \sqrt{\frac{2\,c_1 + 3\,c_2}{3\,m}}$$

<u>Ansatz:</u> $x(t) = e^{-\delta\,t}\,[A_1\,e^{\mu\,t} + A_2\,e^{-\mu\,t}]$ mit $\mu = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$

$x(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -A_2$

$\dot{x}(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{v_0}{2\,\mu} \quad \Rightarrow \quad A_2 = -\frac{v_0}{2\,\mu}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\delta\,t}\left[\tfrac{v_0}{2\,\mu}\,e^{\mu\,t} - \tfrac{v_0}{2\,\mu}\,e^{-\mu\,t}\right]$$

$$= e^{-\delta\,t}\,\frac{v_0}{\mu}\,\sinh(\mu\,t) \qquad \text{(äquivalente Lösung)}$$

Welche Bedingung muss die Dämpferkonstante d_1 erfüllen, damit das System überhaupt starker Dämpfung unterliegt? **(1,0 Punkte)**

$$d_1 > 21\,m\,\sqrt{\frac{2\,c_1 + 3\,c_2}{3\,m}} - 2\,d_2$$