TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

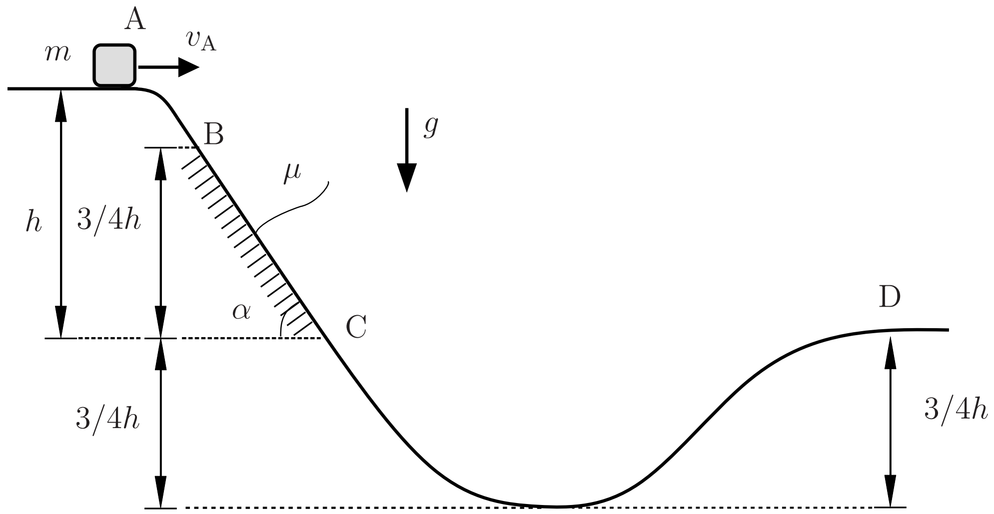
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Eine im Erdschwerefeld g befindliche Punktmasse m startet wie abgebildet auf der Bahn im Punkt A mit der Anfangsgeschwindigkeit v_A. Die Bahn, zu welcher der Körper stets Kontakt hat, ist auf der schiefen Ebene (Winkel α) zwischen den Punkten B und C reibungsbehaftet (Gleitreibungskoeffizient μ) und in allen anderen Bereichen reibungsfrei.



a)
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_D der Punktmasse m im Punkt D. Gehen Sie zunächst von einer reibungsfreien Bahn ($\mu = 0$) zwischen den Punkten B und C aus. (**1,0 Punkte**)

$$v_\text{D} = \sqrt{v_\text{A}^2 + 2\,g\,h)}$$

b)
Gehen Sie im Folgenden von einer reibungsbehafteten Bahn ($\mu \neq 0$) zwischen den Punkten B und C aus.

Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Punktmasse m zwischen den Punkten B und C in tangentialer Richtung ($x-$Richtung) auf. (**0,5 Punkte**)

$$\ddot{x} = g\sin(\alpha) - \mu\,g\,\cos(\alpha)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

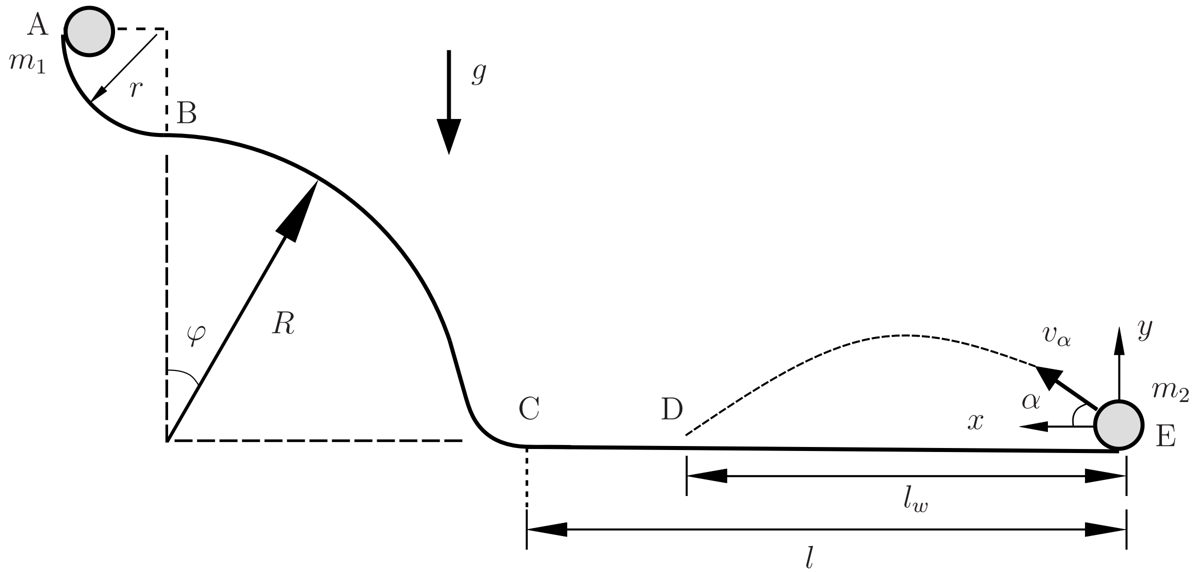
Berechnen Sie die Reibungsarbeit W_{R} zwischen den Punkten B und C. (**1,5 Punkte**)

$$W_{\mathrm{R}} = \frac{3/4\,h}{\sin(\alpha)}\mu\, m\, g \cos(\alpha) = \frac{3}{4}\, h\, \mu\, m\, g\cot(\alpha)$$

Berechnen Sie den Reibungskoeffizienten μ, sodass die Punktmasse m im Punkt D zum Stehen kommt. (**1,0 Punkte**)

$$\mu = \frac{\tan(\alpha)}{g\,3/4\,h}\left(g\,h + \frac{v_{\mathrm{A}}^2}{2}\right)$$

Eine im Erdschwerefeld g befindliche Punktmasse $m_1 = m$ wird wie abgebildet im Punkt A aus der Ruhelage losgelassen.



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)
Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v(\varphi)$ der Punktmasse m_1 zwischen den Punkten B und C in Abhängigkeit vom Winkel φ unter der Annahme dass die Punktmasse m_1 stets Kontakt zur Bahn hat. **(1,5 Punkte)**

$$v(\varphi) = \sqrt{2\,g\,((R - R\cos(\alpha)) + r)}$$

d)
Die Punktmasse $m_2 = 2\,m$ startet im Punkt E mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_α unter dem Winkel $0° < \alpha < 90°$, sobald die Masse m_1 den Punkt C erreicht. Die beiden Massen m_1 und m_2 treffen sich anschließend zeitgleich im Punkt D. Berechnen Sie die Flugzeit t_w der Punktmasse m_2 unter Verwendung des vorgegebenen x-, y-Koordinatensystems. **(1,5 Punkte)**

$$t_w = \frac{2}{g}\,v_\alpha\sin(\alpha)$$

Berechnen Sie die sich daraus ergebende Wurfweite l_w. Die Länge l sei als nicht bekannt anzunehmen. **(1,5 Punkte)**

$$l_w = \frac{2}{g}\,v_\alpha^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{v_\alpha^2}{g}\sin(2\,\alpha)$$

Die beiden Massen m_1 und m_2 treffen sich zum Zeitpunkt t_w im Punkt D. Berechnen Sie die Länge l. **(1,5 Punkte)**

$$l = \frac{v_\alpha^2}{g}\sin(2\,\alpha) + \sqrt{2\,g\,(R + r)}\,\frac{2}{g}\,v_\alpha\sin(\alpha)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

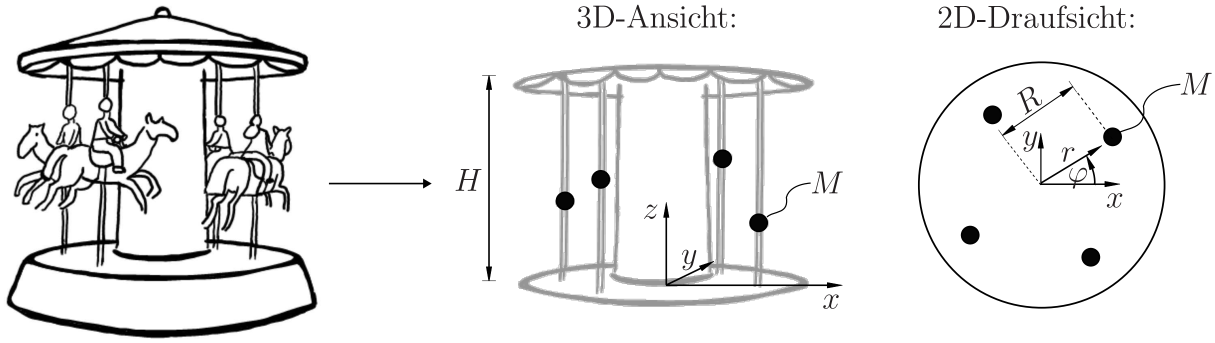
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

In der unten dargestellten Abbildung ist ein Karussell skizziert, welches in Form eines mechanischen Ersatzmodells als ein System aus Punktmassen aufgefasst werden soll. Das System dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ um die z-Achse. Darüber hinaus werden die Stangen mit den Punktmassen M auf und ab bewegt. Diese vertikale Bewegung kann in Abhängigkeit des Winkels φ durch die Funktion $z(\varphi) = \frac{H}{4}(2 - \cos(2\,\varphi))$ beschrieben werden. In der Skizze sind ein mitrotiertes, zylindrisches r, φ, z-Koordinatensystem sowie ein raumfestes, kartesisches x, y, z-Koordinatensystem vorgegeben. Der Ursprung beider Koordinatensysteme liegt wie dargestellt in der Drehachse des Systems. Die Stangen sind jeweils im Abstand $r = R$ zur Drehachse angebracht.

3D-Ansicht: 2D-Draufsicht:



a)
Geben Sie die Koeffizienten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}_M$ der markierten Punktmasse M im mitrotierten, zylindrischen r, φ, z-Koordinatensystem sowie im raumfesten, kartesischen x, y, z-Koordinatensystem als Funktion des Winkels φ an. **(1,5 Punkte)**

$$\boldsymbol{r}_M(\varphi) = R\,\boldsymbol{e}_r + 0\,\boldsymbol{e}_\varphi + z(\varphi)\,\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{r}_M(\varphi) = R\,\cos(\varphi)\,\boldsymbol{e}_x + R\,\sin(\varphi)\,\boldsymbol{e}_y + z(\varphi)\,\boldsymbol{e}_z$$

Bestimmen Sie die Führungs- sowie Relativgeschwindigkeit der Punktmasse M im kartesischen Koordinatensystem in Abhängigkeit des Winkels φ. **(2,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{v}_f(\varphi) = \omega\,R \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{e}_{x,y,z}} \qquad \boldsymbol{v}_r(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{H}{2}\,\sin(2\,\varphi)\,\dot{\varphi} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{e}_{x,y,z}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

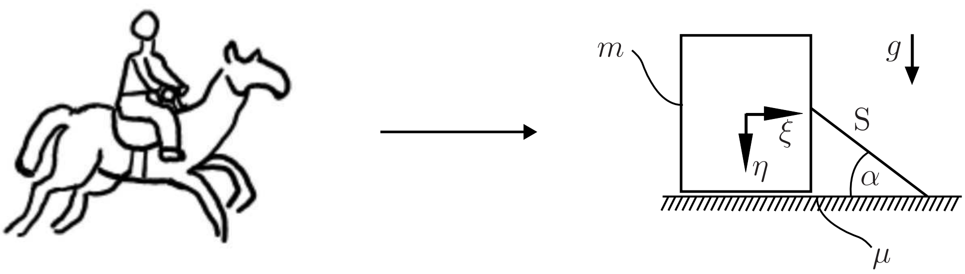
Bestimmen Sie die Relativbeschleunigung der Punktmasse M im kartesischen Koordinatensystem in Abhängigkeit des Winkels φ. **(1,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{a}_r(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H\ \cos(2\,\varphi)\,\dot{\varphi}^2 \end{bmatrix}_{\boldsymbol{e}_{x,y,z}}$$

b)
Die Bewegung der Punktmasse M in der x, y-Ebene kann als Drehbewegung auf der Kreisbahn mit Radius R beschrieben werden. Aus Sicherheitsgründen darf der Betrag der radialen Beschleunigung der Punktmasse auf dieser Kreisbahn den Wert $a_r^{\max}$ nicht überschreiten. Wie groß darf die Winkelgeschwindigkeit ω des Karussells maximal sein, damit diese Vorgabe eingehalten werden kann? **(1,0 Punkte)**

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{a_r^{\max}}{R}}$$

In der nachfolgenden Skizze ist eine Person auf einem Sitz des Karussells dargestellt. Es wurde bereits ein mechanisches Ersatzmodell erstellt, welches den Sitz als flache, reibungsbehaftete Ebene und die Person als Masse m approximiert. Die Person hält sich an einem Seil S fest, welches unter einem Winkel α am Sitz angebracht und gespannt ist. Zwischen der Masse m und der flachen Ebene herrscht der Reibkoeffizient μ und das System befindet sich im Erdschwerefeld g.



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

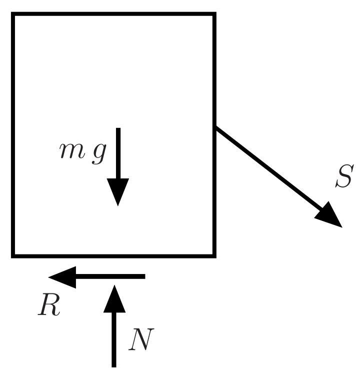
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

c)
Skizzieren Sie ein Freikörperbild der Masse m auf Grundlage des mechanischen Ersatzsystems in der dargestellten 2D-Ansicht. **(1,0 Punkte)**

Freikörperbild:



Berechnen Sie den Betrag der Seilkraft S unter der Annahme, dass die Masse m nun horizontal beschleunigt wird. Diese horizontale Beschleunigung a_ξ ist in Bezug auf das eingezeichnete ξ, η-Koordinatensystem als bekannt vorauszusetzen. In vertikale Richtung soll $a_\eta = 0$ angenommen werden. **(2,0 Punkte)**

$$S = \frac{m\left[a_\xi + \mu\, g\right]}{\cos(\alpha) - \mu\, \sin(\alpha)}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

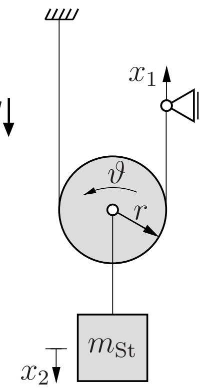
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

d)
Bestimmen Sie, mit welcher Beschleunigung das System maximal abgebremst werden darf, damit das Seil noch unter Spannung bleibt. Rechnen Sie dabei mit der fiktiven Seilkraft $S = \sqrt{2}\, m \left[\frac{a_\xi}{\mu} + g\right]$. **(0,5 Punkte)**

$$-a_\xi < \mu\, g \quad \text{bzw.} \quad |a_\xi|_{\max} = \mu\, g$$

Die vertikale Bewegung der Karusselstangen wird über einen Seilzug realisiert, der durch einen Elektromotor angetrieben wird. In der nebenstehenden Skizze ist das Prinzip dieser Anordnung für eine der Stangen dargestellt, wobei die Stange und die daran angeschlossenen Massen vereinfacht in Form einer Punktmasse m_{St} zusammengefasst werden. Die Geschwindigkeit $\dot{x}_1$, mit welcher der Motor das Seil in Bewegung setzt, sei als bekannt vorausgesetzt. Die Rolle mit dem Radius r rollt schlupffrei auf dem Seil ab.



e)
Geben Sie die Geschwindigkeiten $\dot{\vartheta}$ und $\dot{x}_2$ in Abhängigkeit der Geschwindigkeit $\dot{x}_1$ an. **(1,0 Punkte)**

$$\dot{\vartheta} = \frac{\dot{x}_1}{2\,r}, \quad \dot{x}_2 = -\frac{\dot{x}_1}{r}$$

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

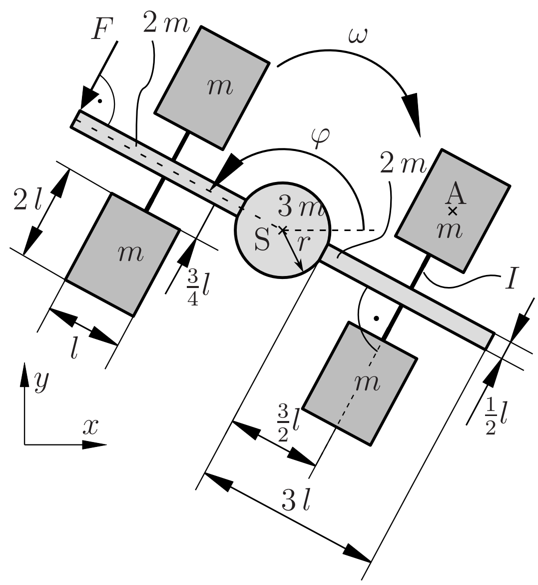
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

Das abgebildete System besteht aus einem starren Verbund von massebehafteten Körpern sowie masselosen Stäben. An eine Scheibe mit dem Radius $r = l/2$ und einer Masse von $3\,m$ sind zwei Balken mit der Länge $3\,l$, der Breite $l/2$ und der Masse $2\,m$ angebracht. An diese Balken sind je zwei rechteckige Scheiben mit der Höhe $2\,l$, Breite l und der Masse m mittels masselosen Stäben der Länge $3/4\,l$ angebracht. Das System rotiert mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω mit dem Uhrzeigersinn ohne eine Translation. Ab dem Zeitpunkt $t = t_0$ wird nun eine äußere Kraft F am oberen Ende des Balkens aufgebracht, welche immer senkrecht auf dem Balken steht.
Hinweis: Für den dargestellten Zeitpunkt ergibt sich ein Winkel von $\varphi = 120°$.



a)
Bestimmen Sie die Beschleunigung des Schwerpunkts S für die dargestellte Lage zum Zeitpunkt t_0. **(1,0 Punkte)**

$$\ddot{x}_S = -\frac{\sqrt{3}}{22}\frac{F}{m}$$

$$\ddot{y}_S = -\frac{1}{22}\frac{F}{m}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

b)
Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment des Systems bezogen auf seinen Schwerpunkt S. Fassen Sie die Terme **nicht** zusammen. **(2,5 Punkte)**

$$\theta_{\mathrm{S}} = \frac{3}{8} m\, l^2 + 4\left[\frac{5}{12} m\, l^2 + 8\, m\, l^2\right] + 2\left[\frac{37}{24} m\, l^2 + 8\, m\, l^2\right] = \frac{425}{8} m\, l^2$$

c)
Das System ist vor dem Zeitpunkt $t < t_0$ lediglich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit vom Betrag $|\omega| = 10\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ rotiert und wies keine Translation auf. Ab dem abgebildeten Zeitpunkt $t = t_0$ beginnt nun, wie in der Skizze dargestellt, die Kraft $F = \frac{20}{7}\,\mathrm{N}$ zu wirken. Das Moment, welches aus dieser Kraft resultiert, wirkt entgegen der Rotationsrichtung und führt folglich zu einer Verringerung der Winkelgeschwindigkeit.
Bestimmen Sie die Zeitspanne t^*, in welcher die Kraft F wirken muss, damit das System zum Stillstand kommt. Bestimmen Sie außerdem die Anzahl der vollen Rotationen n, um welche sich das System in dieser Zeit gedreht hat. Tragen Sie auch relevante Zwischenschritte ein.
Das Massenträgheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt ist mit $\theta_{\mathrm{S}} = 50\,\mathrm{kg\,m^2}$ bekannt und es gilt $l = 1$ m. **(3,0 Punkte)**

$$t^* = \frac{2\,\omega\,\theta_S}{7\,F\,l} = 50\,\mathrm{s}$$

$$n \Longrightarrow \varphi = \frac{7\,F\,l}{4\,\theta_S}\,(t^*)^2 - |\omega|\,t^* + \varphi_0 = 250\,\mathrm{rad} - 500\,\mathrm{rad} + 120^\circ \Rightarrow n = -\frac{250}{2\,\pi} = -39,788$$

$$\Rightarrow n = 39 \text{ oder } n = -39$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

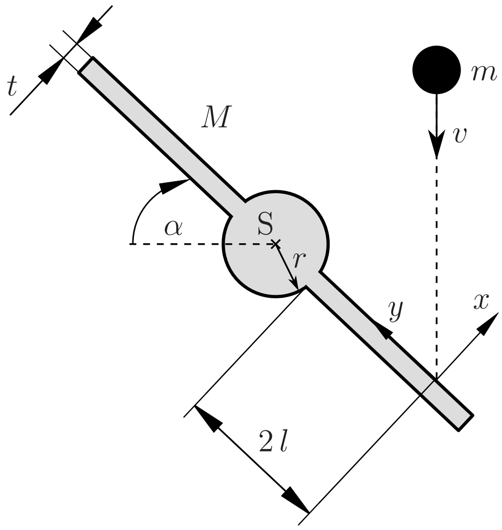
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

Der Körper wird nun vereinfacht als ein starrer Körper mit der Masse M wie abgebildet betrachtet und befindet sich in Ruhe. Nun trifft eine Punktmasse mit der Masse m und einer Anfangsgeschwindigkeit v in Punkt P mit dem Winkel $\alpha = 45°$ so auf den Körper, dass die Punktmasse **nach** dem Stoß **keine** Geschwindigkeit mehr in x-Richtung aufweist. Für dieses Szenario kann die Stoßziffer zu $e = m/M + m(2\,l + r)^2/\theta_S$ bestimmt werden. Gehen Sie davon aus, dass der Stoß reibungsfrei stattfindet. Das Massenträgheitsmoment θ_S sei als bekannt anzunehmen und die Bemaßungen sind der Zeichnung zu entnehmen.



d)
Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten $\bar{v}_x^S$ und $\bar{v}_y^S$ des Körpers im Schwerpunkt nach dem Stoß sowie die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ nach dem Stoß.
Hinweis: Geben Sie ihre Lösungen im angegebenen x-y-Koordinatensystem an. **(2,0 Punkte)**

$$\bar{v}_x^S = -\frac{m}{M}\frac{\sqrt{2}}{2}v$$

$$\bar{v}_y^S = 0$$

$$\bar{\omega} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{m\,v}{\theta_S}(2\,l + r)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

e)
Nehmen Sie nun an, dass der Stoß reibungsbehaftet erfolgt. Welchen Einfluss hat dies auf die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ des Körpers nach dem Stoß, wenn Sie davon ausgehen, dass die Dicke t des Körpers nicht vernachlässigbar ist? Begründen Sie ihre Antwort **kurz**.
(**1,5 Punkte**)

Bei der Annahme eines reibungsfreien Stoßes wird nur Energie in Richtung der Stossnormalen übertragen. Findet nun ein reibungsbehafter Stoß statt, so kann zusätzliche Energie durch Reibung übertragen werden. Für den vorliegenden Fall, dass die Masse nach dem Stoß keine Geschwindigkeit in x-Richtung aufweist, würde dies zu einer höheren Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ führen, da die Reibkraft ein zusätzliches Moment mit dem Hebelarm $t/2$ induzieren würde.