TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

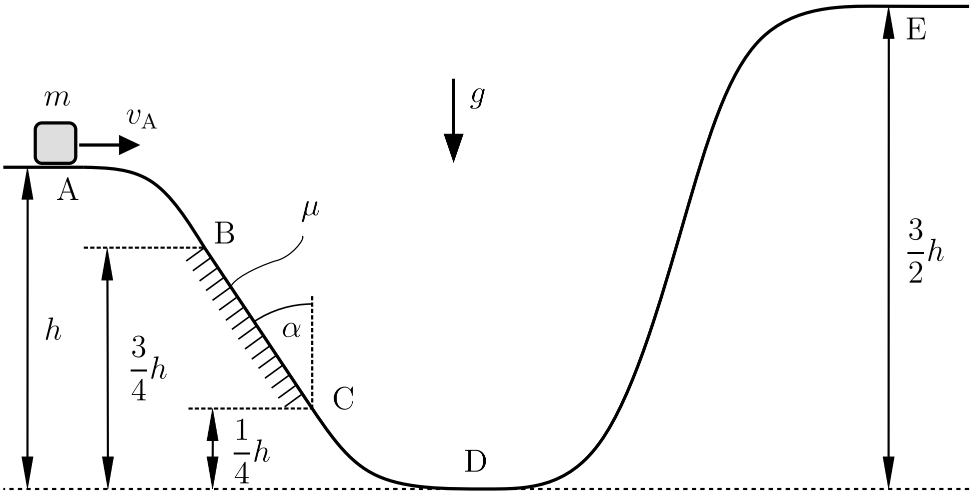
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Eine im Erdschwerefeld g befindliche Punktmasse m startet wie abgebildet auf der Bahn im Punkt A mit der Anfangsgeschwindigkeit v_A. Die Bahn, zu welcher der Körper stets Kontakt hat, ist auf der schiefen Ebene (Winkel α) zwischen den Punkten B und C reibungsbehaftet (Gleitreibungskoeffizient μ) und in allen anderen Bereichen reibungsfrei.



a)
Gehen Sie zunächst von einer reibungsfreien Bahn ($\mu = 0$) zwischen den Punkten B und C aus. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_D der Punktmasse m im Punkt D. (**1,0 Punkte**)

$$v_\mathrm{D} = \sqrt{v_\mathrm{A}^2 + 2gh}$$

Geben Sie nun eine Bedingung für die Anfangsgeschwindigkeit v_A an, sodass die Punktmasse den Punkt E erreicht. Die Bahn sei dabei weiterhin in allen Bereichen reibungsfrei. (**0,5 Punkte**)

$$v_\mathrm{A} \geq \sqrt{gh}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

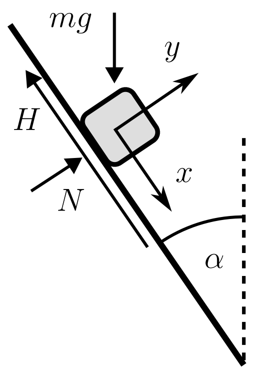
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

b)
Gehen Sie im Folgenden von einer reibungsbehafteten Bahn ($\mu \neq 0$) zwischen den Punkten B und C aus.

Geben Sie die Bewegungsgleichung der Punktmasse m zwischen den Punkten B und C in tangentialer Richtung ($x-$Richtung) auf. Geben Sie dabei wesentliche Zwischenschritte an. **(1,0 Punkte)**



Gleichungen:

$$N = mg\sin\alpha$$
$$H = mg\cos\alpha - m\ddot{x}$$
$$H = \mu N$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} = g\left[\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right]$$

Berechnen Sie die Reibungsarbeit W_{R} zwischen den Punkten B und C unter der Annahme, dass die Masse Punkt C erreicht. **(1,0 Punkte)**

$$W_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\mu mgh\tan\alpha$$

Berechnen Sie den Reibungskoeffizienten μ, sodass die Punktmasse m im Punkt E mit der halben Anfangsgeschwindigkeit ankommt. Gehen Sie dabei davon aus dass die Anfangsgeschwindigkeit groß genug ist, um Punkt E zu erreichen. **(1,5 Punkte)**

$$\mu = \frac{4gh - 3v_{\mathrm{A}}^2}{4gh\tan\alpha}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

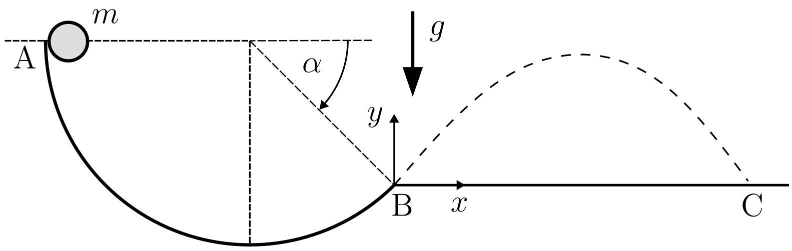
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)

Eine im Erdschwerefeld g befindliche Punktmasse m wird wie abgebildet im Punkt A aus der Ruhelage auf einer reibungsfreien Kreisbahn losgelassen. Im Punkt B geht die Kreisbahn bei einem Winkel von $\alpha = \pi/4$ in eine horizontale Gerade über, und die Punktmasse bewegt sich auf der nicht maßstäblich skizzierten Bahn, bis sie im Punkt C wieder auf die Gerade trifft. Die Geschwindigkeit v_B sei im Folgenden gegeben.



Geben Sie das Zeitintervall Δt für die Bewegung der Masse von Punkt B zum Punkt C an. **(2,0 Punkte)**

$$\Delta t = \sqrt{2}\frac{v_\mathrm{B}}{g}$$

Geben Sie außerdem den Zusammenhang zwischen x- und y-Koordinate auf der Flugbahn an. **(1,5 Punkte)**

$$y(x) = x - \frac{g}{v_\mathrm{B}^2}x^2$$

Welche maximale Höhe y_max erreicht die Masse auf der Flugbahn? **(1,5 Punkte)**

$$y_\mathrm{max} = \frac{1}{4}\frac{v_\mathrm{B}^2}{g}$$

Vorname: ____________________

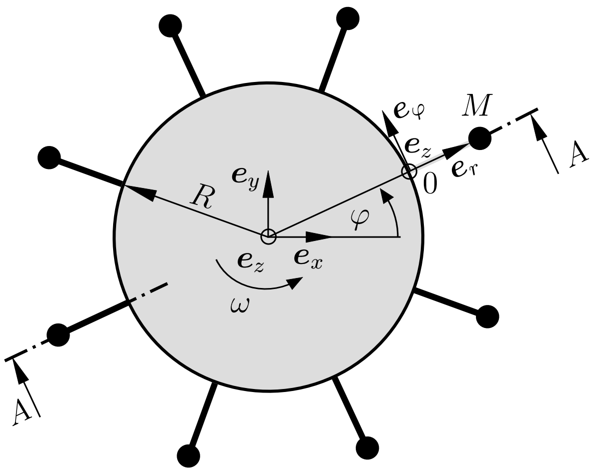
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

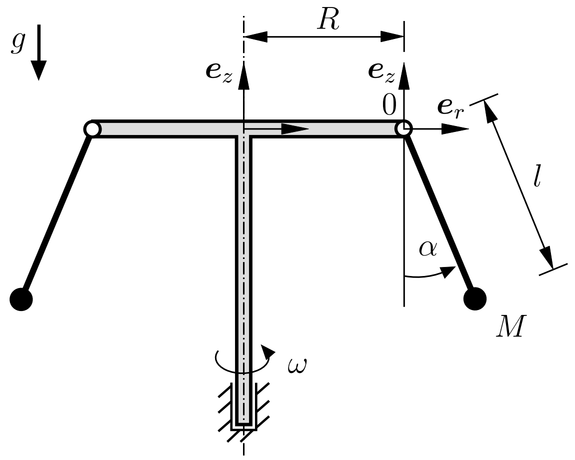
Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

In der unten dargestellten Abbildung ist ein Kettenkarussell im Schwerefeld der Erde skizziert, welches in Form eines mechanischen Ersatzmodels als ein System aus Punktmassen aufgefasst werden soll. Das System dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ um die z-Achse. Auf Grund der Drehbewegung werden die Stangen (Länge l), an deren Enden sich die Fahrgäste (jeweils mit Masse M) befinden, um den Winkel α ausgelenkt. Das raumfeste x, y, z-Koordinatensystem befindet sich wie dargestellt in der Drehachse des Systems. Das mitrotierende r, φ, z-Koordinatensystem befindet sich an der Aufhängung einer ausgewählten Stange (Punkt 0). Die (masselosen) Stangen sind jeweils im Abstand R zur Drehachse angebracht.

Draufsicht:



Schnitt A - A:



a)
Geben Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_0$ bezüglich des raumfesten x, y, z-Koordinatensystems als Funktion des Winkels φ an. **(0,5 Punkte)**

$$\boldsymbol{r}_0(\varphi) = \cos\varphi\, R\, \boldsymbol{e}_x \quad + \sin\varphi\, R\, \boldsymbol{e}_y \quad + 0\, \boldsymbol{e}_z$$

Geben Sie den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_{0M}$ bezüglich des mitrotierten r, φ, z-Koordinatensystems als Funktion des Winkels α an. **(1,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{r}_{0M}(\alpha) = \sin\alpha\, l\, \boldsymbol{e}_r \quad + 0\, \boldsymbol{e}_\varphi \quad - \cos\alpha\, l\, \boldsymbol{e}_z$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Bestimmen Sie daraus nun den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_M$ bezüglich des raumfesten x, y, z-Koordinatensystems als Funktion der Winkel φ und α. **(1,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{r}_M(\varphi,\alpha) = \cos\varphi\,(R+\sin\alpha\, l)\,\boldsymbol{e}_x$$
$$+\sin\varphi\,(R+\sin\alpha\, l)\,\boldsymbol{e}_y$$
$$-\cos\alpha\, l\,\boldsymbol{e}_z$$

Bestimmen Sie die Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_r$ der Punktmasse M in Abhängigkeit des Winkels α für eine stationäre Fahrt $(\dot\omega = 0, \dot\alpha = 0)$ und eine beschleunigte Fahrt $(\dot\omega \neq 0, \dot\alpha \neq 0)$. **(1,5 Punkte)**

Fall 1: Stationäre Fahrt

$$\boldsymbol{v}_r(\alpha) = 0\,\boldsymbol{e}_r \quad + 0\,\boldsymbol{e}_\varphi \quad + 0\,\boldsymbol{e}_z$$

Fall 2: Beschleunigte Fahrt

$$\boldsymbol{v}_r(\alpha) = \cos\alpha\,\dot\alpha\, l\,\boldsymbol{e}_r \quad + 0\,\boldsymbol{e}_\varphi \quad + \sin\alpha\,\dot\alpha\, l\,\boldsymbol{e}_z$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

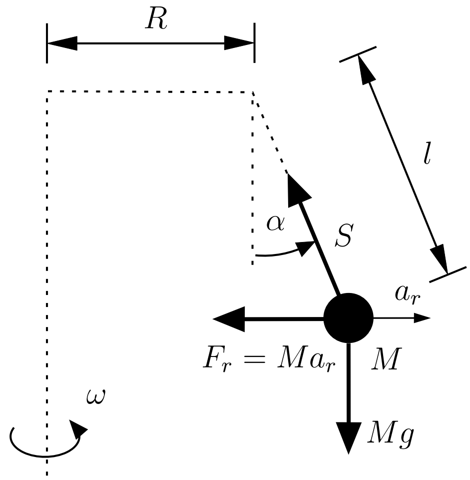
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

b)
In Aufgabenteil b) soll der Auslenkungswinkel α für eine stationäre Fahrt ($\dot{\omega} = 0$, $\dot{\alpha} = 0$) bestimmt werden.
Skizzieren Sie dazu zunächst ein Freikörperbild der Masse M auf Grundlage des Schnitts A - A. **(1,0 Punkte)**



Stellen Sie daraus eine Beziehung zur Bestimmung des Winkels α auf ohne den Ausdruck explizit nach α aufzulösen. Geben Sie auch die wichtigsten Zwischenschritte an. **(2,0 Punkte)**

$$\tan\alpha = \frac{(R + \sin\alpha\, l)\,\omega^2}{g}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

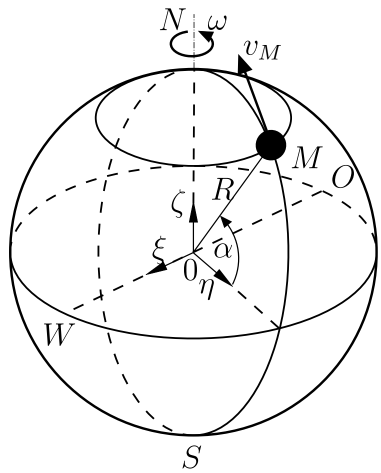
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

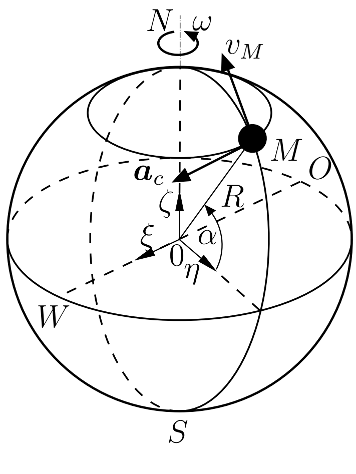
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

c)
Auf der rotierenden Erde (Radius R, Winkelgeschwindigkeit ω) bewegt sich eine Masse M mit der konstanten Geschwindigkeit $v_M = R\,\dot{\alpha}$ nach Norden (N). Der Breitengrad von M wird über den Winkel α beschrieben. Das mit der Erde mitbewegte ξ, η, ζ-System dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die ζ-Achse. Das (nicht dargestellte) raumfeste x, y, z-Koordinatensystem befindet sich im Mittelpunkt 0 der Erde.



Bestimmen Sie die Coriolisbeschleunigung $\boldsymbol{a}_c$ der Masse M in Abhängigkeit des Breitengrades α und zeichnen Sie diese qualitativ in die untenstehende Skizze ein. Geben Sie auch die wichtigsten Zwischenschritte an. **(2,5 Punkte)**



$$\boldsymbol{a}_c = 2\,\omega\,\sin\alpha\,R\,\dot{\alpha}\,\boldsymbol{e}_\xi + 0\,\boldsymbol{e}_\eta + 0\,\boldsymbol{e}_\zeta$$
$$= 2\,\omega\,\sin\alpha\,v_M\,\boldsymbol{e}_\xi + 0\,\boldsymbol{e}_\eta + 0\,\boldsymbol{e}_\zeta$$

An welchem Breitengrad α wird die Coriolisbeschleunigung $\boldsymbol{a}_c$ maximal? **(0,5 Punkte)**

An den Polen $\alpha = \pi/2$ oder $\alpha = -\pi/2$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

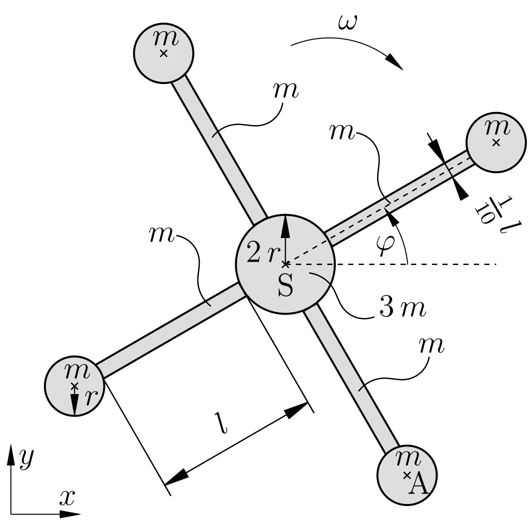
Vorname: ________________

Nachname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

Das abgebildete System besteht aus einem starren Verbund von massebehafteten Körpern. An eine Scheibe mit dem Radius $2\,r$ und einer Masse von $3\,m$ sind vier Balken mit der Länge l, der Breite $l/10$ und der Masse m angebracht. An diese Balken ist je eine Kreisscheibe mit dem Radius r und der Masse m angebracht. Es gilt $r = l/8$. Das System rotiert mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω mit dem Uhrzeigersinn ohne Translation des Gesamtschwerpunktes.



a)
Bestimmen Sie die Beschleunigung des Punktes A in Abhängigkeit der Auslenkung φ.
(2,0 Punkte)

$$\ddot{x}_A = -\sin(\varphi)\,\omega^2\;[3\,r + l] = -\sin(\varphi)\,\omega^2\,\frac{11}{8}\,l$$

$$\ddot{y}_A = \cos(\varphi)\,\omega^2\;[3\,r + l] = \cos(\varphi)\,\omega^2\,\frac{11}{8}\,l$$

b)
Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment des Systems bezogen auf seinen Schwerpunkt S. Fassen Sie die Terme **nicht** zusammen.
(2,5 Punkte)

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{S}} &= 6\,m\,r^2 + 4\,\left[\frac{1}{2}\,m\,r^2 + m\,[3\,r + l]^2\right] + 4\,\left[\frac{1}{12}\,m\,\left[l^2 + \left[\frac{l}{10}\right]^2\right] + m\,\left[2\,r + \frac{l}{2}\right]^2\right]\\ &= 6\,m\,\left[\frac{l}{8}\right]^2 + 4\,\left[\frac{1}{2}\,m\,\left[\frac{l}{8}\right]^2 + m\,\left[\frac{11}{8}\,l\right]^2\right] + 4\,\left[\frac{1}{12}\,m\,\frac{101}{100}\,l^2 + m\,\left[\frac{3}{4}\,l\right]^2\right]\end{aligned}$$

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

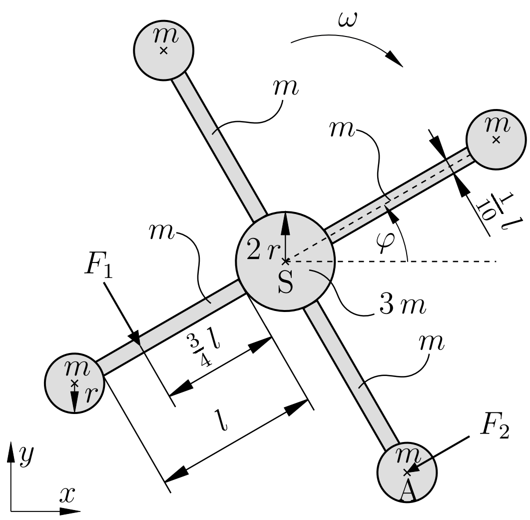
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

c)
Begründen Sie warum das System eine translatorische Bewegung erfahren würde, wenn Sie **einen** der vier Stäbe in der Länge ändern würden. (**0,5 Punkte**)

Das System ist nicht mehr symmetrisch.
Die Deviationsmomente verschwinden.
Die Rotationsachse liegt nicht mehr im Schwerpunkt.

Betrachten Sie nun dasselbe System, das wie nebenstehend dargestellt durch zwei äußere Kräfte belastet wird. Die erste Kraft F_1 greift im Abstand $3l/4$ zur zentralen Kreisscheibe an und die zweite Kraft F_2 im Schwerpunkt der kleineren Kreisscheibe unten rechts. Beide externen Kräfte wirken ab dem Zeitpunkt $t = t_0$ und bleiben danach immer senkrecht zu den jeweiligen Balken.



d)
Bestimmen Sie die Beschleunigung des Schwerpunkts S ab dem Zeitpunkt $t = t_0$ in Abhängigkeit des Winkels φ. (**1,0 Punkte**)

$$\ddot{x}_S = \frac{1}{11\,m}\,[F_1\,\sin(\varphi) - F_2\,\cos(\varphi)]$$

$$\ddot{y}_S = \frac{1}{11\,m}\,[-F_1\,\cos(\varphi) - F_2\,\sin(\varphi)]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

e)
Welche Bedingung muss für die Kräfte F_1 und F_2 gelten, damit die Rotation des Systems abgebremst wird. **(1,0 Punkte)**

$$F_1 \geq F_2 \, \frac{11}{8}$$

f)
Das System rotiert zum Zeitpunkt t_0 mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit vom Betrag $|\omega| = 5\,\frac{1}{\mathrm{s}}$. Die initiale Auslenkung zu diesem Zeitpunkt beträgt $\varphi_0 = 0$. Gehen Sie davon aus, dass die externen Kräfte mit $F_1 = 3\,\mathrm{N}$ und $F_2 = 1\,\mathrm{N}$ gegeben sind. Bestimmen Sie die Zeitspanne t^*, während der die externen Kräfte wirken müssen, damit das System rotatorisch zum Stillstand kommt. Tragen Sie auch relevante Zwischenschritte ein. Das Massenträgheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt ist mit $\theta_\mathrm{S} = 20\,\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2$ bekannt und es gilt $l = 1$ m.
Hinweis: Beachten Sie, dass die oben dargestellte Lage nicht den Zeitpunkt t_0 repräsentiert. **(3,0 Punkte)**

Drallsatz:

$$\theta_\mathrm{S}\,\ddot{\varphi} = F_1\,l - \frac{11}{8}\,F_2\,l$$

Zeitintegration:

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{\theta_\mathrm{S}}\left[F_1 - \frac{11}{8}\,F_2\right]\tilde{t} - \omega_0$$

$$\dot{\varphi}(t^*) = 0$$

$$t^* = \frac{w_0\,\theta_\mathrm{S}}{l}\,\frac{1}{F_1 - \frac{11}{8}\,F_2} = \frac{800}{13}\,\mathrm{s}$$