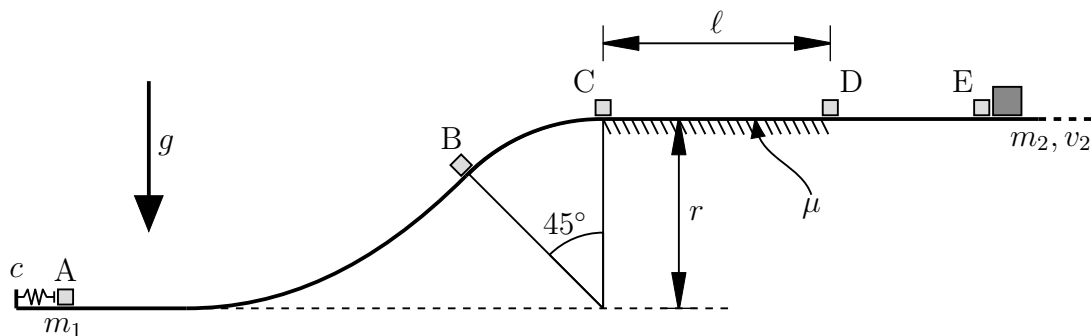


Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Eine im Erdschwerefeld g befindliche Punktmasse m_1 wird in Punkt A durch eine lineare Feder (Federkonstante c) gespannt und beschleunigt und folgt anschließend der abgebildeten Bahn. Zwischen Punkten B und C nimmt die Bahn eine kreisförmige Kurve mit dem Radius r über einen Winkel von 45° an. Anschließend folgt die Masse zwischen Punkten C und D einer reibungsbehafteten Ebene mit Gleitreibungskoeffizienten μ . Zwischen Punkt D und E folgt die Punktmasse einer horizontalen Bahn. Außer zwischen Punkten C und D ist die Bahn als reibungsfrei anzunehmen.



a)

Wie groß muss die Auslenkung ΔL der Feder mindestens sein, damit die Punktmasse den Punkt C erreicht? **(1,0 Punkte)**

$$\Delta L \geq \sqrt{\frac{2 m_1 g r}{c}}$$

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Wie groß darf die Auslenkung ΔL der Feder **höchstens** sein, damit die Punktmasse zwischen den Punkten B und C die Bahn nicht verlässt? Geben Sie wichtige Zwischenschritte an. **(4,0 Punkte)**

$$\Delta L \leq \sqrt{\frac{3 \sqrt{2} m_1 g r}{2 c}}$$

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)

Im Folgenden wird angenommen, dass die Punktmasse mit der Geschwindigkeit v_C den Punkt C erreicht.

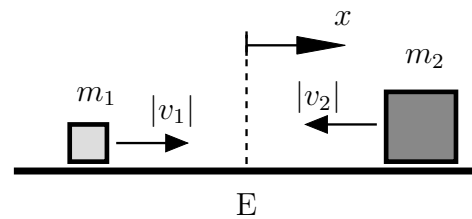
Wie lang muss die Strecke ℓ zwischen Punkten C und D sein, damit die Geschwindigkeit der Punktmasse auf die Hälfte reduziert wird ($v_D = v_C/2$)? Welche Zeit t_{CD} wird für den Abbremsvorgang zwischen den Punkten C und D benötigt? **(3,0 Punkte)**

$$\ell = \frac{3 v_C^2}{8 \mu g}$$

$$t_{CD} = \frac{v_C}{2 \mu g}$$

d)

In Punkt E stößt die Punktmasse voll elastisch mit einer weiteren Punktmasse der Masse $m_2 = 5 m_1$ zusammen. Diese bewegt sich vor dem Stoß mit der gleichen Geschwindigkeit aber entgegengesetzt zur Punktmasse m_1 ($v_2 = -v_1 = -v_C/2$). Die Geschwindigkeit ist positiv bezüglich der gegebenen Koordinate x definiert.



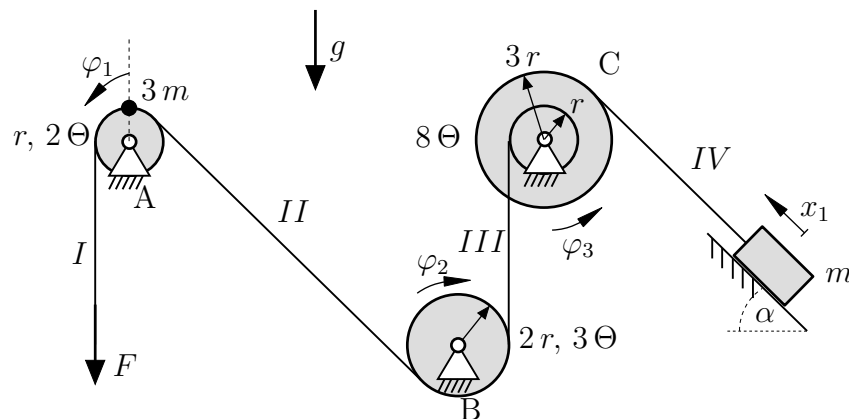
Geben Sie die Geschwindigkeiten $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$ der beiden Punktmassen nach dem Stoßvorgang an. **(2,0 Punkte)**

$$\bar{v}_1 = -\frac{7}{3} v_E = -\frac{7}{6} v_C$$

$$\bar{v}_2 = -\frac{1}{3} v_E = -\frac{1}{6} v_C$$

Aufgabe 2 (Seite 1 von 5)

Das dargestellte Rollensystem besteht aus drei Rollen (A, B, C) und einem Starrkörper. Der Körper gleitet reibungsfrei auf einer Ebene mit dem Winkel α zur Horizontalen. Die einzelnen Seilabschnitte sind mit *I* bis *IV* gekennzeichnet und werden im Folgenden für die Indizes der Seilkräfte verwendet. Nehmen Sie an, dass die Seile stets unter Zugspannung stehen. Massen (als Vielfache von m) bzw. Trägheitsmomente (Vielfache von Θ) der Rollen und des Körpers sind der Zeichnung zu entnehmen, genau wie die Radien (Vielfache von r) der Rollen. **Zusätzlich** besitzt Rolle A eine punktmassenförmige Unwucht (Masse $3m$). Das System befindet sich im Schwerfeld g .



a)

Berechnen Sie die Seilkraft S_{IV} in Abhängigkeit der Beschleunigung $\ddot{x}_1$. **(1,5 Punkte)**

$$S_{IV}(\ddot{x}_1) = m \ddot{x}_1 - m g \sin(\alpha)$$

b)

Berechnen Sie die Seilkraft S_{II} in Abhängigkeit der Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}_1$ und der Kraft F für die dargestellte Lage. **(1,5 Punkte)**

$$S_{II}(\ddot{\varphi}_1, F) = F - \left[\frac{2\Theta}{r} + 3mr \right] \ddot{\varphi}_1$$

Aufgabe 2 (Seite 2 von 5)

c)

Geben Sie die kinematische Bindung zwischen den Zeitableitungen von φ_2 und φ_3 an. **(1,0 Punkte)**

$$\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_3) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}_3$$

d)

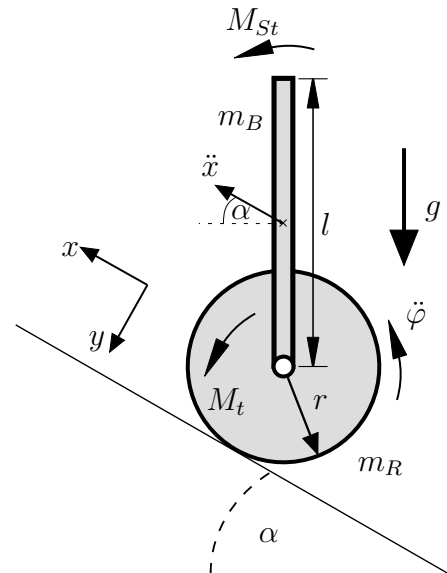
Geben Sie die kinematische Bindung zwischen den Zeitableitungen von φ_3 und x_1 an. **(1,0 Punkte)**

$$\dot{\varphi}_3(\dot{x}_1) = \frac{\dot{x}_1}{3r}$$

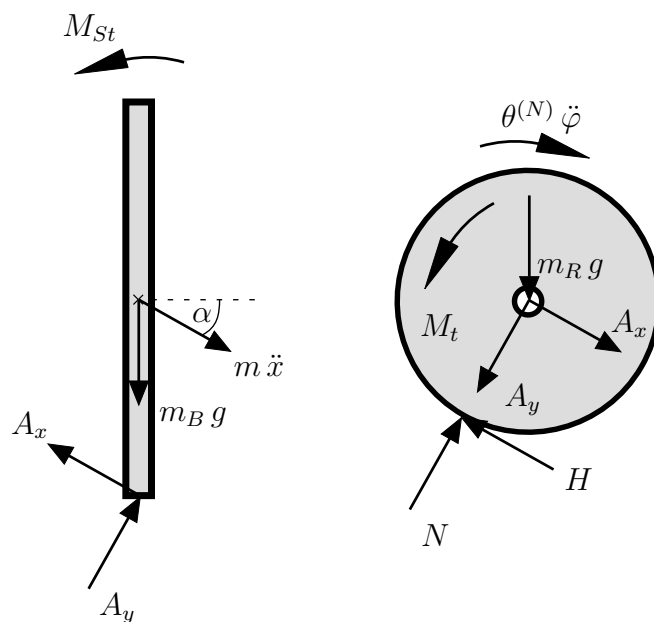
Aufgabe 2 (Seite 3 von 5)

e)

Im Folgenden soll ein vereinfachtes Modell eines Segways (s. Abbildung) untersucht werden. Dieses besteht aus einem Balken (Masse m_B , Länge l) und einem Rad (Masse m_R), welche über ein Gelenk verbunden sind. Ein Motor treibt das Rad mit dem Drehmoment M_t an. Der Balken wird über eine Steuereinheit (Moment M_{St}) **stets vertikal** (parallel zur Richtung der Erdbeschleunigung g) gehalten. Im Einsatz sollen unterschiedliche Steigungen (Winkel α) überwunden werden. Das Rad rollt stets schlupffrei auf dem Untergrund ab.



Vervollständigen Sie die Freikörperbilder des Balkens und des Rads für eine beliebige Steigung $0 < \alpha < \pi/2$. Tragen Sie dabei auch alle auftretenden Trägheitskräfte und -momente an. (2,0 Punkte)



Alternativ: Aufteilung der Trägheit des Rades in Beschleunigung des Schwerpunkts und Rotation um diesen.

Aufgabe 2 (Seite 4 von 5)

Berechnen Sie das dafür benötigte Steuermoment M_{St} in Abhängigkeit der Beschleunigung des Balkenschwerpunkts ($\ddot{x}$) und des Winkels α . Notieren Sie wichtige Zwischenschritte im nachfolgenden Kästchen. **(2,0 Punkte)**

$$\sum M_i^{(A)} = M_{St} - m_B \ddot{x} \cos(\alpha) \frac{l}{2} = 0$$

$$\sum F_{i,x} = m_B \ddot{x} = A_x - \sin(\alpha) m_B g \quad (\text{für nächste Teilaufgabe})$$

$$M_{St}(\ddot{x}, \alpha) = m_B \ddot{x} \cos(\alpha) \frac{l}{2}$$

Aufgabe 2 (Seite 5 von 5)

Berechnen Sie nun die Winkelbeschleunigung des Rads in Abhängigkeit des Antriebsmoments M_t . Notieren Sie wichtige Zwischenschritte im nachfolgenden Kästchen. **(1,0 Punkte)**

$$\sum M_i^{(N)} = \frac{3}{2} m_r r^2 \ddot{\varphi} = M_t - A_x r - m_r g \sin(\alpha) r$$

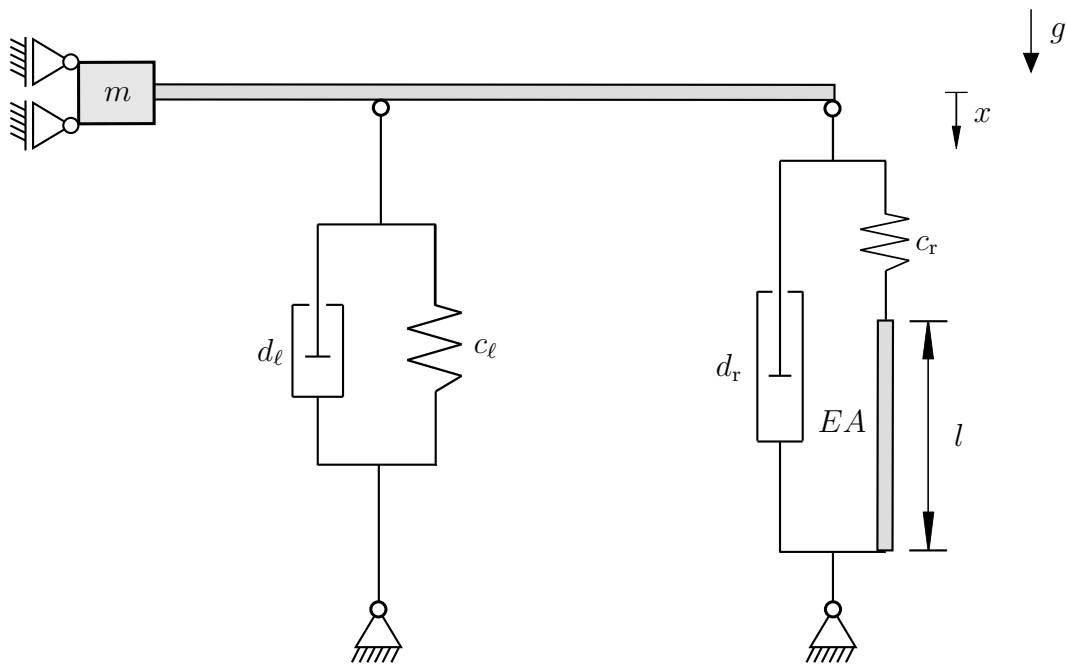
mit $A_x = m_B \ddot{x} + \sin(\alpha) m_B g$ und $\ddot{x} = \ddot{\varphi} r$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m_r r^2 \ddot{\varphi} = M_t - m_B \ddot{\varphi} r^2 - m_B g \sin(\alpha) r - m_r g \sin(\alpha) r$$

$$\ddot{\varphi}(M_t) = \frac{M_t - m_B g \sin(\alpha) r - m_r g \sin(\alpha) r}{\left(\frac{3}{2} m_r + m_B \right) r^2}$$

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

Das dargestellte Ersatzsystem besteht aus zwei Federn mit den Steifigkeiten c_ℓ und c_r , zwei Dämpfern mit den Dämpferkonstanten d_ℓ und d_r , einer Masse m , sowie einem biegestarren Biegebalken und einem Dehnstab mit der Dehnsteifigkeit EA . Die Federn sind in der dargestellten Lage unbelastet.



a)

Berechnen Sie die Ersatzfedersteifigkeit c_{ers} bezüglich der vertikalen Verschiebung der Masse. Fassen Sie die Terme **nicht** zusammen. **(2,0 Punkte)**

$$c_{\text{ers}} = c_\ell + \left[\frac{1}{c_r} + \frac{l}{EA} \right]^{-1}$$

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

b)

Gehen Sie von der Ersatzfedersteifigkeit c_{ers} aus und bestimmen Sie die potentielle Energie E_p , die kinetische Energie E_k und die nicht konservativen Kräfte Q für das oben dargestellte System bezüglich des Freiheitsgrades x . **(2,0 Punkte)**

$$E_p = \frac{1}{2} c_{\text{ers}} x^2 - mgx$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$Q = -d_\ell \dot{x} - d_r \dot{x}$$

c)

Geben Sie die Bewegungs-Differentialgleichung für das dargestellte System bezüglich des Freiheitsgrades x an. **(1,5 Punkte)**

$$m\ddot{x} + (d_\ell + d_r)\dot{x} + c_{\text{ers}}x = mg$$

Gehen Sie für die weiteren Aufgabenteile von der folgenden Bewegungs-Differentialgleichung aus

$$\left(m + \frac{M}{4}\right) \ddot{x} + d \dot{x} + \left(\frac{c_1}{2} + c_2\right) x = \left(m + \frac{M}{4}\right) g.$$

d)

Bestimmen Sie die Auslenkung x_0 , die das System in der statischen Ruhelage erfährt. **(1,0 Punkte)**

$$x_0 = \frac{m + \frac{M}{4}}{\frac{c_1}{2} + c_2} g = \frac{4m + M}{2c_1 + 4c_2} g$$

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

e)

Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 und den Abklingkoeffizient δ . **(1,0 Punkte)**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{c_1}{2} + c_2}{m + \frac{M}{4}}}$$

$$\delta = \frac{d}{2m + \frac{M}{2}}$$

f)

Gehen Sie davon aus, dass für die oben gegebene Bewegungs-Differentialgleichung eine Koordinatentransformation stattgefunden hat, sodass es sich nun um eine homogene Differentialgleichung handelt mit $\bar{x}$ als Freiheitsgrad. Die transformierte Differentialgleichung lautet

$$\left(m + \frac{M}{4}\right) \ddot{\bar{x}} + d \dot{\bar{x}} + \left(\frac{c_1}{2} + c_2\right) \bar{x} = 0.$$

Berechnen Sie den die Dämpferkonstante d für den aperiodischen Grenfall ($D = 1$). **(1,0 Punkte)**

$$d = 2\sqrt{\left(m + \frac{M}{4}\right) \left(\frac{c_1}{2} + c_2\right)}$$

g)

Bestimmen Sie für den Fall einer schwachen Dämpfung ($0 < D < 1$), einer anfänglichen Auslenkung $\bar{x}(0) = 0$ und einer initialen Geschwindigkeit $\dot{\bar{x}}(0) = v_0$, die Bewegungsfunktion $\bar{x}(t)$. Nutzen Sie dafür die oben dargestellte homogene Differentialgleichung, sowie die Eigenkreisfrequenz ω_0^* und den Dämpfungsgrad δ^* . **(1,5 Punkte)**

$$\bar{x}(t) = e^{-\delta^* t} \frac{v_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) = e^{-\delta^* t} \frac{v_0}{2i\omega_d} (e^{i\omega_d t} - e^{-i\omega_d t})$$

$$\text{mit } \omega_d = \omega_0^* \sqrt{1 - \left(\frac{\delta^*}{\omega_0^*}\right)^2}$$