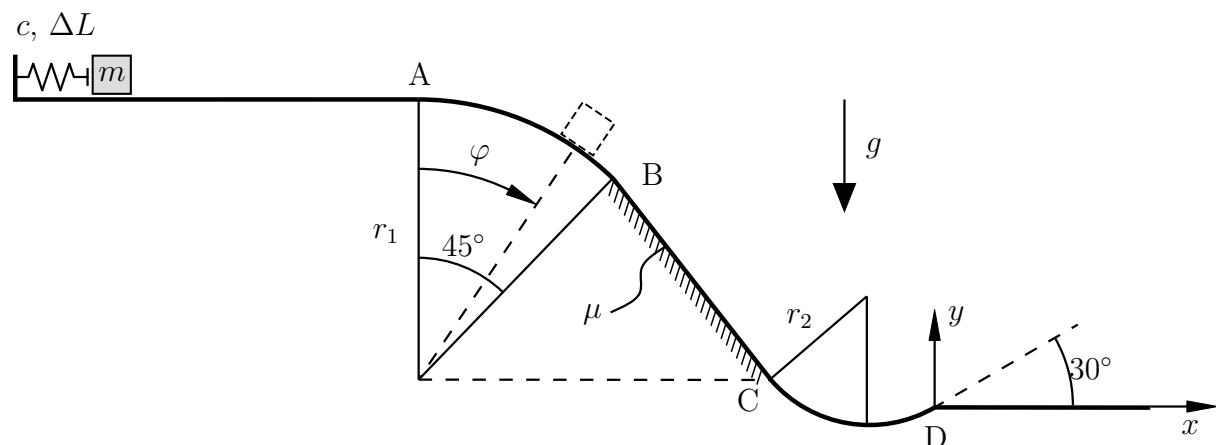


Hinweis:

Die nachfolgende Aufgabe ist eine Freitextaufgabe. Ausschließlich für diese Aufgabe wird der gesamte Rechenweg Ihrer Lösung bewertet. Für die jeweiligen Teilaufgaben stehen Ihnen die nachfolgenden Lösungskästchen zur Verfügung. Tragen Sie alle Ihre Rechenschritte in die Kästchen ein.

Aufgabe 1 (Seite 1 von 1)

Die Punktmasse m befindet sich im Erdschwerefeld (Erdbeschleunigung g). Zu Beginn wird die Masse durch eine lineare Feder (Federkonstante c , initiale Auslenkung ΔL) beschleunigt und folgt anschließend der dargestellten Bahn. Dabei durchläuft die Masse ein gekrümmtes Bahnstück A bis B (Krümmungsradius r_1), ein reibungsbehaftetes Bahnstück B bis C (Gleitreibungskoeffizient μ) und schließlich wieder ein gekrümmtes Teilstück C bis D (Krümmungsradius r_2). Anschließend geht die Masse ab Punkt D in eine freie Bewegung über. Alle gekrümmten Bahnstücke entsprechen reinen Kreisbahnen und weisen in den Punkten A, B und C tangentielle Übergänge zu geraden Bahnstücken auf.



a)

Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeitsfunktion $\dot{\varphi}(\varphi)$ der Masse in Abhängigkeit des Winkels φ zwischen den Punkten A und B.

Bestimmen Sie zudem die maximale initiale Auslenkung $\Delta L_{\max}$ der Feder, bei der die Masse m die Bahn zwischen Punkten A und B nicht verlässt. **(4,0 Punkte)**

Hinweis: Aufgabenteile b) - c) sind unabhängig von a) lösbar.

b)

Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponenten der Masse in Punkt D im angegebenen x - y -Koordinatensystem. **(3,0 Punkte)**

c)

Es durchlaufen nun zwei Massen ($m_1 \neq m_2$) die dargestellte Bahn bei sonst gleichbleibenden Parametern ($g, \Delta L, \mu, r_1, r_2$). Die absolute Differenz der Wurfweiten sei gegeben und beträgt ΔS . Bestimmen Sie die Federkonstante c abhängig von ΔS . **(3,0 Punkte)**

Aufgabe 1 a)

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{c[\Delta L]^2}{m r_1^2} + \frac{2g}{r_1} [1 - \cos(\varphi)]}$$

$$\Delta L \leq \sqrt{\frac{r_1 m g}{2c} [3\sqrt{2} - 4]}$$

Aufgabe 1 b)

$$v = \sqrt{\frac{c[\Delta L]^2}{m} + 2g \left[r_1 + \frac{r_2}{2} [\sqrt{3} - \sqrt{2}] \right] - \sqrt{2} \mu g r_1}$$

$$v_x = \cos(30^\circ) v$$

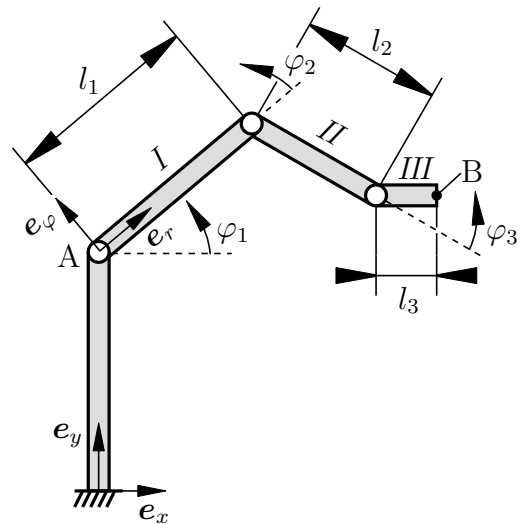
$$v_y = \sin(30^\circ) v$$

Aufgabe 1 c)

$$c = \frac{2g \Delta S m_1 m_2}{\sqrt{3} [\Delta L]^2 |m_2 - m_1|}$$

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

Das abgebildete Ersatzsystem besteht aus drei Gelenkarmen *I*, *II* und *III*, die sich ausschließlich in der x - y -Ebene bewegen. Der Gelenkarm *III* soll stets horizontal ausgerichtet sein. Die dargestellten Winkel φ_2 und φ_3 beschreiben die Verdrehung der Achsen *II* und *III* gegenüber der jeweils vorhergehenden Achse. Das r, φ -Koordinatensystem im Punkt A rotiert, wie dargestellt, mit dem Gelenkarm *I*.



a)

Bestimmen Sie den Winkel φ_3 in Abhängigkeit der Winkel φ_1 und φ_2 , sodass der Gelenkarm *III* stets horizontal ausgerichtet ist. **(0,5 Punkte)**

$$\varphi_3(\varphi_1, \varphi_2) = -(\varphi_1 + \varphi_2)$$

b)

Geben Sie den Ortsvektor $\mathbf{r}_{AB}$ bezüglich des mitrotierten r, φ -Koordinatensystems als Funktion der Winkel φ_1 und φ_2 an. **(3,0 Punkte)**

$$\mathbf{r}_{AB} = (l_1 + l_2 \cos(\varphi_2) + l_3 \cos(\varphi_1)) \mathbf{e}_r + (l_2 \sin(\varphi_2) - l_3 \sin(\varphi_1)) \mathbf{e}_\varphi$$

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

Bestimmen Sie die Führungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{B,f}$ des Punktes B im mitrotierten r, φ -Koordinatensystem als Funktion der Winkel φ_1 und φ_2 sowie der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_1$. **(1,0 Punkte)**

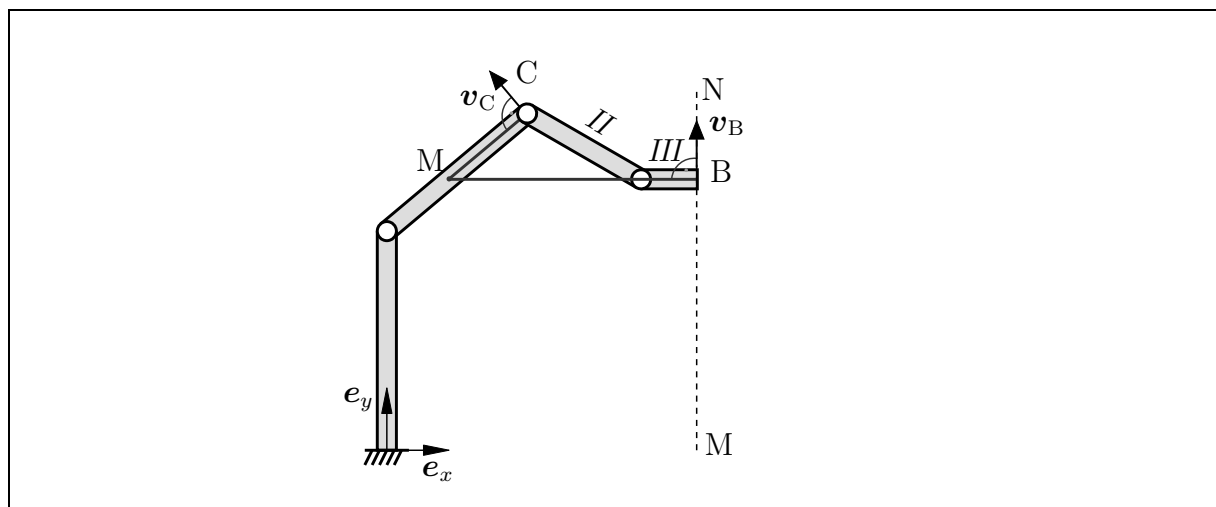
$$\mathbf{v}_{B,f} = -\dot{\varphi}_1 (l_2 \sin(\varphi_2) - l_3 \sin(\varphi_1)) \mathbf{e}_r + \dot{\varphi}_1 (l_1 + l_2 \cos(\varphi_2) + l_3 \cos(\varphi_1)) \mathbf{e}_\varphi$$

Bestimmen Sie die Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}_{B,r}$ des Punktes B im mitrotierten r, φ -Koordinatensystem als Funktion der Winkel φ_1 und φ_2 sowie der Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}_1$ und $\dot{\varphi}_2$. **(1,0 Punkte)**

$$\mathbf{v}_{B,r} = (-\dot{\varphi}_2 l_2 \sin(\varphi_2) - \dot{\varphi}_1 l_3 \sin(\varphi_1)) \mathbf{e}_r + (\dot{\varphi}_2 l_2 \cos(\varphi_2) - \dot{\varphi}_1 l_3 \cos(\varphi_1)) \mathbf{e}_\varphi$$

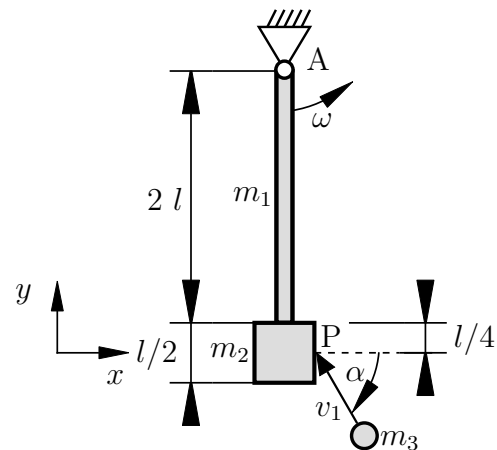
c)

Es wird nun angenommen, dass sich Punkt B vertikal auf der Linie M-N bewegt. Der Gelenkarm *III* bleibt weiterhin horizontal ausgerichtet. Zeichnen Sie für die dargestellte Lage den Momentanpol des Gelenkarms *II* **und** den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_C$ am Punkt C in das nachfolgende Kästchen. Kennzeichnen Sie dabei angenommene **rechte Winkel** eindeutig. **(1,5 Punkte)**



Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

Das rechts abgebildete Pendel rotiert in der dargestellten Lage mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Im Punkt P stößt eine Punktmasse m_3 unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit v auf die quadratische Scheibe. Der Stoß erfolgt glatt und teilelastisch mit der Stoßziffer e .



d)

Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment θ_A des Pendels bezogen auf den Lagerpunkt A. **(1,0 Punkte)**

Hinweis: Das auf den Schwerpunkt bezogene Massenträgheitsmoment einer rechteckigen Scheibe mit den Seitenlängen a und b beträgt: $\theta_S = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$.

$$\theta_A = \frac{1}{3} m_1 l^2 + m_1 l^2 + \frac{1}{24} m_2 l^2 + \frac{81}{16} m_2 l^2$$

Nehmen Sie das Massenträgheitsmoment θ_A als gegeben an. Gesucht sind nun die Winkelgeschwindigkeit des Pendels $\bar{\omega}$ nach dem Stoß sowie die Geschwindigkeitskomponenten $\bar{v}_{1,x}$ und $\bar{v}_{1,y}$ der Punktmasse nach dem Stoß.

Stellen Sie die Gleichungen auf, die zur vollständigen Bestimmung dieser drei unbekannten Größen notwendig sind. Lösen Sie die Gleichungen **nicht** nach den gesuchten Größen auf. **(2,0 Punkte)**

$$\hat{F}_x = m_3 (\bar{v}_{1,x} - v_{1,x}), \quad v_{1,x} = v_1 \cos(\alpha)$$

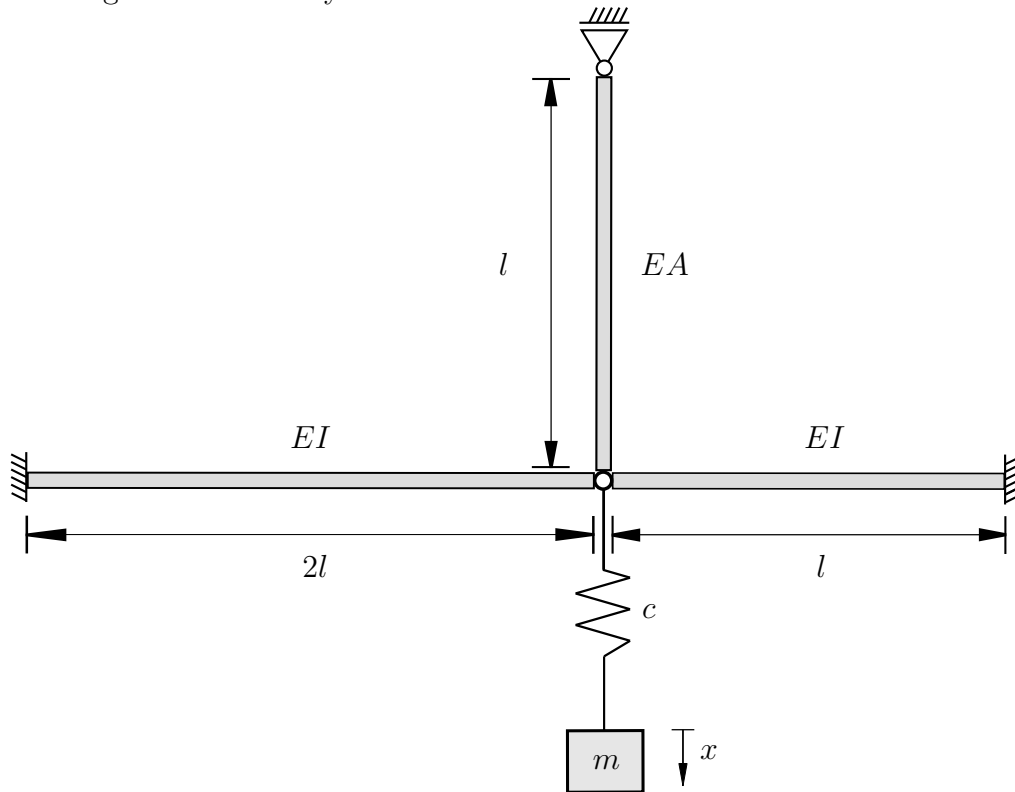
$$\theta_A (\bar{\omega} - \omega) = -\hat{F}_x (2l + \frac{1}{4}l)$$

$$e = -\frac{\bar{v}_{2,x} - \bar{v}_{1,x}}{v_{2,x} - v_{1,x}}, \quad \text{mit } \bar{v}_{2,x} = \bar{\omega} (2l + \frac{1}{4}l), \quad v_{2,x} = \omega (2l + \frac{1}{4}l)$$

$$\hat{F}_y = 0 = m_3 (\bar{v}_{1,y} - v_{1,y}), \quad v_{1,y} = v_1 \sin(\alpha)$$

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

Es gilt das dargestellte Ersatzsystem.



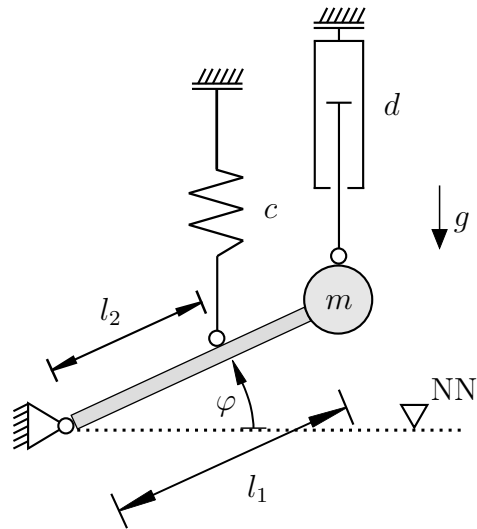
a)

Berechnen Sie die Ersatzfedersteifigkeit c_{ers} bezüglich der vertikalen Verschiebung der Punktmasse m . Fassen Sie die Terme **nicht** zusammen. **(1,5 Punkte)**

$$c_{\text{ers}} = \left[\left[\frac{3EI}{8l^3} + \frac{3EI}{l^3} + \frac{EA}{l} \right]^{-1} + \frac{1}{c} \right]^{-1}$$

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

Gehen Sie im Folgenden von dem dargestellten System aus. Bei der bewegten Masse handelt es sich um eine Punktmasse.



b)

Bestimmen Sie die potentielle Energie E_p , die kinetische Energie E_k und die nicht konservativen Kräfte Q für das oben dargestellte System bezüglich des Freiheitsgrades φ .
(2,0 Punkte)

$$E_p = \frac{1}{2} c \sin^2(\varphi) l_2^2 + m g \sin(\varphi) l_1$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{\varphi}^2 l_1^2$$

$$Q = -d \dot{\varphi} \cos^2(\varphi) l_1^2$$

Geben Sie die Bewegungs-Differentialgleichung für das dargestellte System bezüglich des Freiheitsgrades φ an.
(2,0 Punkte)

$$\ddot{\varphi} m l_1^2 + \dot{\varphi} \cos^2(\varphi) l_1^2 d + \sin(\varphi) \cos(\varphi) c l_2^2 = -m g l_1 \cos(\varphi)$$

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

Bestimmen Sie, wie groß das Verhältnis l_2^2/l_1 sein muss, damit die statische Ruhelage bei $\varphi_0 = -\pi/6$ liegt.

$$\frac{l_2^2}{l_1} = \frac{2mg}{c}$$

Gehen Sie von der folgenden Bewegungs-Differentialgleichung aus

$$4ml^2\ddot{\varphi} + dl^2\dot{\varphi} + c_T\varphi = 4m l g.$$

c)

Gehen Sie von der folgenden Bewegungs-Differentialgleichung aus

$$ml^2\ddot{\varphi} + dl^2\dot{\varphi} + 2c_T\varphi = m l g.$$

Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 und den Abklingkoeffizienten δ . **(1,0 Punkte)**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2c_T}{ml^2}}$$

$$\delta = \frac{d}{2m}$$

d)

Gegeben ist die folgende inhomogene Differentialgleichung

$$ml^2\ddot{\bar{\varphi}}(t) + dl^2\dot{\bar{\varphi}}(t) + 2c_T\bar{\varphi}(t) = M_0 \cos(\Omega t).$$

Die partikuläre Lösung ist gegeben als $\bar{\varphi}_p(t) = P \cos(\Omega t) + Q \sin(\Omega t)$ mit den gegebenen Konstanten P und Q .

Bestimmen Sie für den Fall einer schwachen Dämpfung ($0 < D < 1$) und die gegebene Partikulärlösung die gesamt Lösung $\bar{\varphi}(t)$ so, dass die Anfangsbedingungen $\bar{\varphi}(0) = 0$ und $\dot{\bar{\varphi}}(0) = 0$ erfüllt werden. Nutzen Sie dafür die Eigenkreisfrequenz ω_0^* , den Abklingkoeffizienten δ^* und die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_d . **(2,5 Punkte)**

$$\omega_d = \omega_0^* \sqrt{1 - \left(\frac{\delta^*}{\omega_0^*}\right)^2}$$

$$A = -P, \quad B = -\frac{\delta^* P + Q\Omega}{\omega_d}$$

$$\bar{\varphi}(t) = e^{-\delta^* t} \left[-C \cos(\omega_d t) - \frac{\delta^* P + Q\Omega}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] + P \cos(\Omega t) + Q \sin(\Omega t)$$