TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

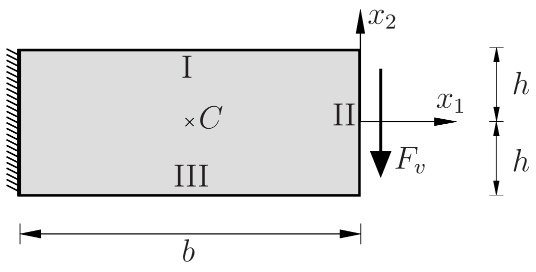
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Die dargestellte Scheibe (Dicke t) der Breite b und Höhe $2\,h$ ist linksseitig fest eingespannt und weist drei freie Ränder I, II und III auf. Rand II wird durch eine vertikale Kraft F_v wie dargestellt belastet. Es wird ein ebener Spannungszustand (ESZ) bzgl. der x_1,x_2-Ebene angenommen.



Als Airy'sche Spannungsfunktion sei

$$F(x_1, x_2) = c_1\, x_1\, x_2 + c_2\, x_1\, x_2^3$$

gegeben.

a)
Geben Sie sämtliche Spannungen als Funktion des Ortes (x_1, x_2), die nicht identisch gleich Null sind, **ohne** Bestimmung der Konstanten c_1 und c_2 an. **(1,5 Punkte)**

Geben Sie die Normalenvektoren $\boldsymbol{n}^{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{n}^{\mathrm{II}}$, $\boldsymbol{n}^{\mathrm{III}}$ der drei freien Ränder bezüglich des vorgegebenen (x_1, x_2)-Koordinatensystems an. **(1,5 Punkte)**

$\boldsymbol{n}^{\mathrm{I}} =$ $\boldsymbol{e}_1 +$ $\boldsymbol{e}_2$

$\boldsymbol{n}^{\mathrm{II}} =$ $\boldsymbol{e}_1 +$ $\boldsymbol{e}_2$

$\boldsymbol{n}^{\mathrm{III}} =$ $\boldsymbol{e}_1 +$ $\boldsymbol{e}_2$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

Geben Sie die zu der Airy'schen Spannungsfunktion korrespondierenden Spannungsvektoren $\boldsymbol{t}^{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{t}^{\mathrm{II}}$, $\boldsymbol{t}^{\mathrm{III}}$ an den drei freien Rändern bezüglich des vorgegebenen (x_1, x_2)-Koordinatensystems an (**ohne** Bestimmung der Konstanten c_1 und c_2). **(1,5 Punkte)**

$\boldsymbol{t}^{\mathrm{I}} =$ $\boldsymbol{e}_1 +$ $\boldsymbol{e}_2$

$\boldsymbol{t}^{\mathrm{II}} =$ $\boldsymbol{e}_1 +$ $\boldsymbol{e}_2$

$\boldsymbol{t}^{\mathrm{III}} =$ $\boldsymbol{e}_1 +$ $\boldsymbol{e}_2$

Geben Sie das Gleichungssystem an (**ohne** es zu lösen), mit dessen Hilfe die Konstanten c_1 und c_2 bestimmt werden können. **(1,0 Punkte)**

Geben Sie nun die Werte der Konstanten c_1 und c_2 an. **(2,0 Punkte)**

$c_1 =$ $c_2 =$

Welche Werte haben die Spannungskomponenten im Zentrum (Punkt C)? **(0,5 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

b)
Für ein rotationssymmetrisches und daher in Polarkoordinaten r, φ formuliertes Randwertproblem (abweichend von Teil a) sei die Airy'sche Spannungsfunktion

$$F(r, \varphi) = c_1 \, r^2 + c_2 \, \varphi \, \ln(r) + c_3 \, r^2 \, \varphi$$

gegeben.

Geben Sie die Funktionen der Spannungskoordinaten σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$ sowie $\sigma_{r\varphi}$ in Abhängigkeit der Polarkoordinaten **ohne** Bestimmung der Konstanten c_1, c_2 und c_3 an. **(1,5 Punkte)**

$\sigma_{rr} =$

$\sigma_{\varphi\varphi} =$

$\sigma_{r\varphi} =$

Berechnen Sie den Wert der Spannung in Umfangsrichtung im Punkt $(r, \varphi) = (2, \pi/2)$ **ohne** Bestimmung etwaiger Konstanten. **(0,5 Punkte)**

TU Dortmund

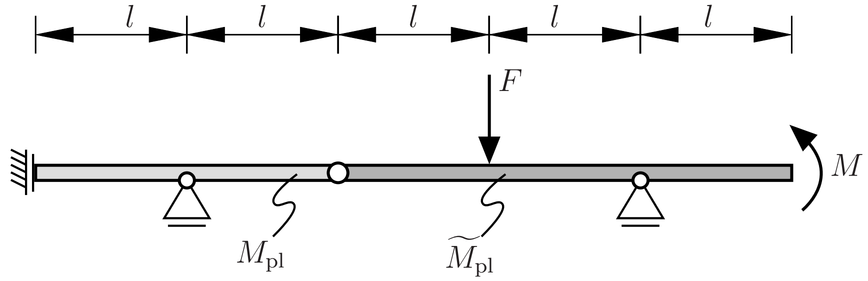
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

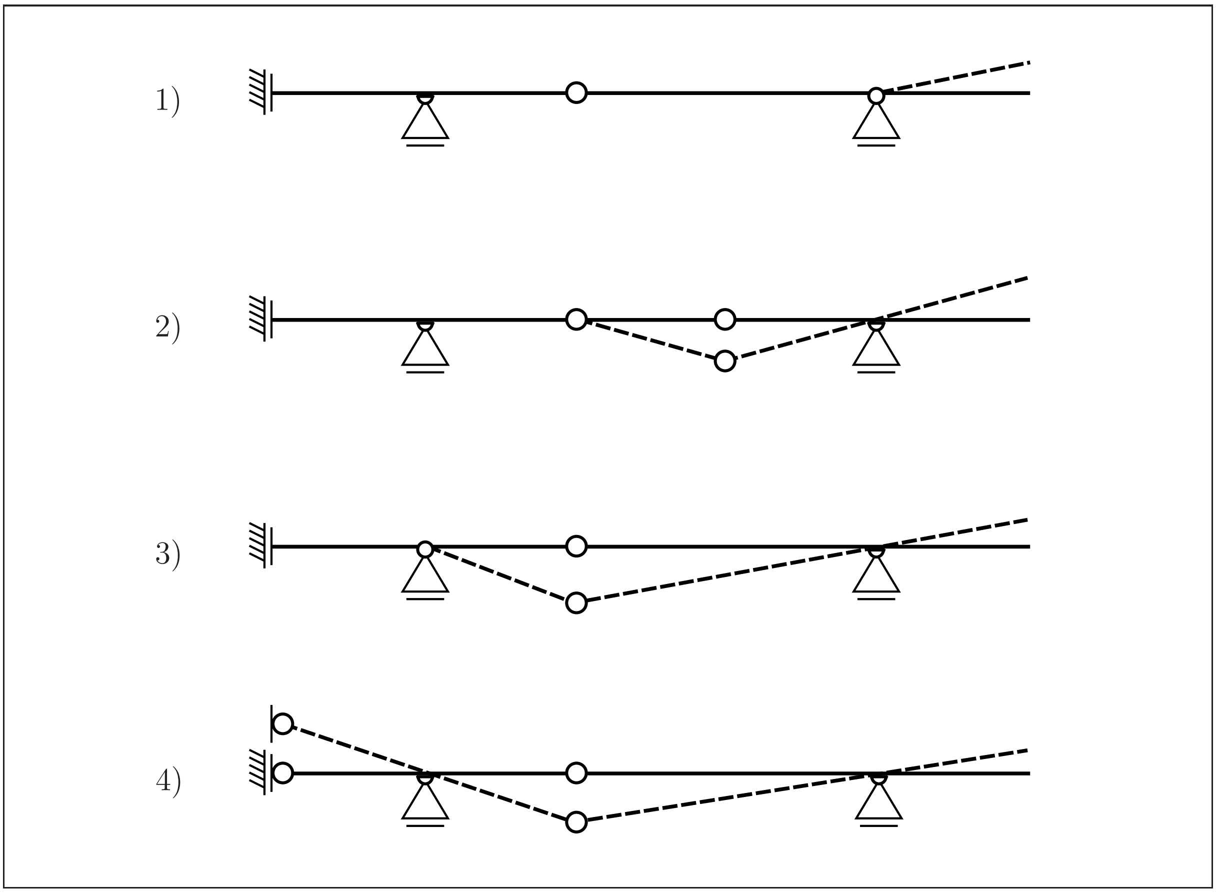
Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)



a)

Das dargestellte Balkensystem soll unter Berücksichtigung von Plastizität bemessen werden. Spannungen infolge von Quer- und Normalkräften können dabei vernachlässigt werden. Die plastischen Grenzmomente seien für den linken Balken mit M_{pl} und für den rechten mit $\widetilde{M}_{\text{pl}}$ gegeben. Abmessungen, Belastungen und Lagerungen sind der Skizze zu entnehmen.

Im folgenden Kästchen sind bereits Positionen möglicher Fließgelenke und die dazu jeweils korrespondierende Auslenkung des Systems dargestellt. Ergänzen Sie die Zeichnungen um sämtliche plastische Momente und äußere Lasten! **(2,0 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

Zeichnen Sie nun Winkelbezeichnungen für die ausgelenkten Lagen ein und geben Sie sämtliche auftretenden Winkelbeziehungen für kleine Auslenkungen des Systems an! Stellen Sie dann, abhängig von nur **einem** Freiheitsgrad, den jeweiligen Ausdruck für die virtuelle Arbeit δW_i auf! **(2,0 Punkte)**

$\delta W_1 =$	$\delta W_3 =$
$\delta W_2 =$	$\delta W_4 =$

Es gelte im Folgenden $M = 1/2\, F\, l$ und $\widetilde{M}_{\text{pl}} = 3/2\, M_{\text{pl}}$. Bestimmen Sie für jede Konfiguration die Grenzwerte F_i^{grenz} in Abhängigkeit von M_{pl}, mit welcher das System gemäß der Fließgelenktheorie maximal belastet werden kann! **(2,0 Punkte)**

$F_1^{\text{grenz}} =$	$F_3^{\text{grenz}} =$
$F_2^{\text{grenz}} =$	$F_4^{\text{grenz}} =$

Geben Sie nun den maßgeblichen Grenzwert für das Gesamtsystem an! **(0,5 Punkte)**

$F_{\text{gesamt}}^{\text{grenz}} =$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

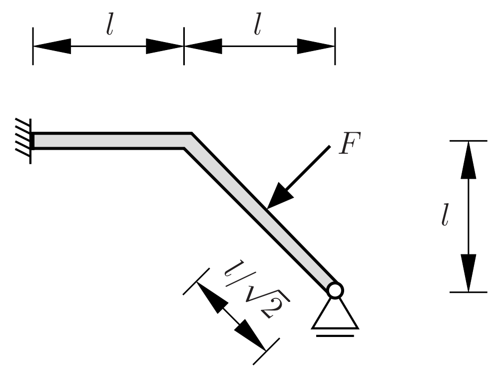
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

b) Das nebenstehend abgebildete Balkensystem besteht aus einem abgewinkelten und wie gezeigt gelagerten Balken. Zeichnen Sie alle für dieses System möglichen Fließgelenkketten in das folgende Kästchen! Skizzieren Sie außerdem die ausgelenkten Lagen unter Angabe der geltenden Winkelbeziehungen für kleine Auslenkungen des Systems!

(**3,5 Punkte**)



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

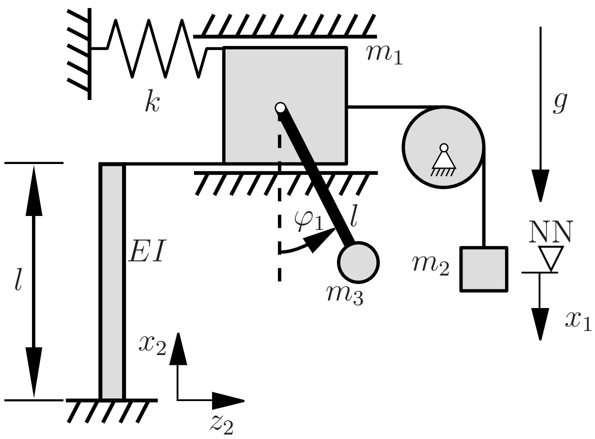
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

Das im Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung g) befindliche dargestellte System besteht aus einem masselosen Biegebalken (Biegesteifigkeit EI, Länge l) sowie zwei starren Masseblöcken (Masse m_1, bzw. m_2), welche über dehnstarre Seile miteinander verbunden sind, und einem starren Pendel (Länge l) mit einer Punktmasse am Ende (Masse m_3). An der Masse m_1 ist des Weiteren eine Feder (Federsteifigkeit k) befestigt, welche für den Zustand $x_1 = 0$ ungespannt ist. Die Masse m_1 gleitet widerstandslos in ihrer Lagerung. Für die Werte $x_1 = \varphi_1 = 0$ befinden sich die Massen m_2 und m_3 auf Höhe des Nullniveaus NN.



a)
Geben Sie die kinematischen und dynamischen Randbedingungen der Biegelinie $w(x_2)$ des Biegebalkens für das dargestellte System an, die zur eindeutigen Lösung der Differentialgleichung vierter Ordnung notwendig sind.
Hinweis: Falls inhomogene Randbedingungen vorliegen sind diese in Abhängigkeit vorgegebener Größen bzw. der kinematischen Freiheitsgrade zu formulieren. (**2,0 Punkte**)

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

b)
Beschreiben Sie kurz in Worten wie Sie prüfen können, ob ein Ansatz $\widetilde{w}(x_2)$ für die Biegelinie des Balkens kinematisch zulässig ist. Beschreiben Sie des Weiteren kurz in Worten wie Sie die Freiwerte eines Ansatzes gemäß dem Ritzverfahen bestimmen können.
(1,5 Punkte)

c)
Die Biegelinie des Balkens sei durch

$$w(x_2) = \frac{1}{2\,l^3}\,x_1\left[3\,l\,x_2^2 - x_2^3\right]$$

gegeben. Bestimmen Sie das Potential Π des gesamten Systems in Abhängigkeit der Freiheitsgerade x_1 und φ_1.
Hinweis: Evtl. auftretende Integrale **sollen ausgewertet werden**. **(2,0 Punkte)**

$\Pi =$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

d)
Für ein alternatives System wurde das Potential

$$\widetilde{\Pi} = -\,2\,m\,g\,x + \frac{31}{2}\,k\,x^2 + 3\,m\,g\left[\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}\,l\,\cos(\varphi)\right] + k\left[\frac{1}{2}\,l + x - \frac{1}{2}\,l\,\cos(\varphi)\right]^2 + \frac{1}{8}\,k^*\,l^2\,\sin(\varphi)^2$$

bestimmt. Welche Bedingungen müssen für die Federsteifigkeiten k und k^* gelten, damit der Zustand $x = 2\,l$, $\varphi = 0$ ein Gleichgewichtszustand ist. Geben Sie wichtige Schritte des Lösungsweges im nachfolgenden Kästchen an. **(3,0 Punkte)**

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

Erläutern Sie kurz in Worten welche Bedingung unter Verwendung eines Gesamtpotenzials Π allgemein erfüllt sein muss, damit die für bestimmte Werte der Koordinaten $x = x^*$ und $\varphi = \varphi^*$ vorliegende Gleichgewichtslage des zugehörigen Systems als **stabil** bezeichnet werden kann. Geben Sie zudem an, wie Sie dies in geeigneter Form praktisch umsetzen können. (**1,5 Punkte**)