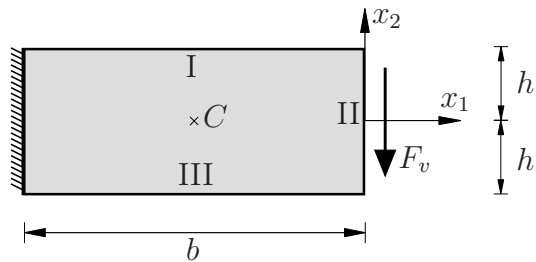


**Aufgabe 1** (Seite 1 von 3)

Die dargestellte Scheibe (Dicke  $t$ ) der Breite  $b$  und Höhe  $2h$  ist linksseitig fest eingespannt und weist drei freie Ränder I, II und III auf. Rand II wird durch eine vertikale Kraft  $F_v$  wie dargestellt belastet. Es wird ein ebener Spannungszustand (ESZ) bzgl. der  $x_1, x_2$ -Ebene angenommen.



Als Airy'sche Spannungsfunktion sei

$$F(x_1, x_2) = c_1 x_1 x_2 + c_2 x_1 x_2^3$$

gegeben.

a)

Geben Sie sämtliche Spannungen als Funktion des Ortes  $(x_1, x_2)$ , die nicht identisch gleich Null sind, **ohne** Bestimmung der Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  an. **(1,5 Punkte)**

$$\sigma_{11} = 6 c_2 x_1 x_2$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = -c_1 - 3 c_2 x_2^2$$

Geben Sie die Normalenvektoren  $\mathbf{n}^I$ ,  $\mathbf{n}^{II}$ ,  $\mathbf{n}^{III}$  der drei freien Ränder bezüglich des vorgegebenen  $(x_1, x_2)$ -Koordinatensystems an. **(1,5 Punkte)**

$$\mathbf{n}^I = 0 \mathbf{e}_1 + 1 \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{n}^{II} = 1 \mathbf{e}_1 + 0 \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{n}^{III} = 0 \mathbf{e}_1 + [-1] \mathbf{e}_2$$

**Aufgabe 1** (Seite 2 von 3)

Geben Sie die zu der Airy'schen Spannungsfunktion korrespondierenden Spannungsvektoren  $\mathbf{t}^I$ ,  $\mathbf{t}^{II}$ ,  $\mathbf{t}^{III}$  an den drei freien Rändern bezüglich des vorgegebenen  $(x_1, x_2)$ -Koordinatensystems an (**ohne** Bestimmung der Konstanten  $c_1$  und  $c_2$ ). **(1,5 Punkte)**

$$\mathbf{t}^I = [-c_1 - 3c_2 x_2^2] \mathbf{e}_1 + 0 \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{t}^{II} = [6c_2 x_1 x_2] \mathbf{e}_1 + [-c_1 - 3c_2 x_2^2] \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{t}^{III} = [c_1 + 3c_2 x_2^2] \mathbf{e}_1 + 0 \mathbf{e}_2$$

Geben Sie das Gleichungssystem an (**ohne** es zu lösen), mit dessen Hilfe die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  bestimmt werden können. **(1,0 Punkte)**

$$\text{I und III: } c_1 + 3c_2 x_2^2 = 0$$

$$\text{II} \quad : \quad \int_{-h}^h \sigma_{12}(x_1 = 0) t \, dx_2 + F_v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t [c_1 h + c_2 h^3] = F_v$$

Geben Sie nun die Werte der Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  an. **(2,0 Punkte)**

$$c_1 = \frac{3F_v}{4ht} \quad c_2 = -\frac{F_v}{4h^3t}$$

Welche Werte haben die Spannungskomponenten im Zentrum (Punkt C)? **(0,5 Punkte)**

$$\sigma_{11} = 0 \quad \sigma_{22} = 0 \quad \sigma_{12} = -c_1 = -\frac{3F_v}{4ht}$$

**Aufgabe 1** (Seite 3 von 3)

b)

Für ein rotationssymmetrisches und daher in Polarkoordinaten  $r, \varphi$  formuliertes Randwertproblem (abweichend von Teil a) sei die Airy'sche Spannungsfunktion

$$F(r, \varphi) = c_1 r^2 + c_2 \varphi \ln(r) + c_3 r^2 \varphi$$

gegeben.

Geben Sie die Funktionen der Spannungskordinaten  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}$  sowie  $\sigma_{r\varphi}$  in Abhängigkeit der Polarkoordinaten **ohne** Bestimmung der Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$  und  $c_3$  an. **(1,5 Punkte)**

$$\sigma_{rr} = 2c_1 + \frac{c_2 \varphi}{r^2} + 2c_3 \varphi$$

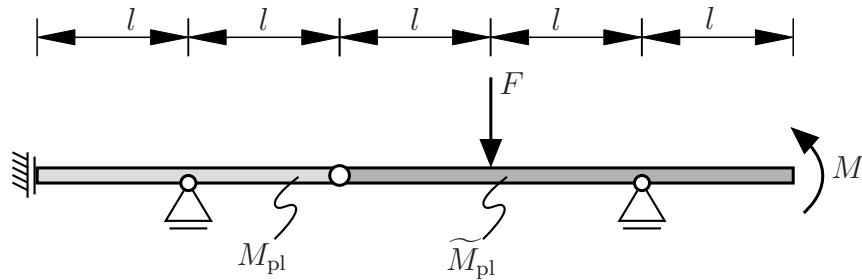
$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2c_1 - \frac{c_2 \varphi}{r^2} + 2c_3 \varphi$$

$$\sigma_{r\varphi} = -c_2 \frac{1 - \ln(r)}{r^2} - c_3$$

Berechnen Sie den Wert der Spannung in Umfangsrichtung im Punkt  $(r, \varphi) = (2, \pi/2)$  **ohne** Bestimmung etwaiger Konstanten. **(0,5 Punkte)**

$$\sigma_{\varphi\varphi} \left( r = 2, \varphi = \frac{\pi}{2} \right) = 2c_1 - c_2 \frac{\pi}{8} + c_3 \pi$$

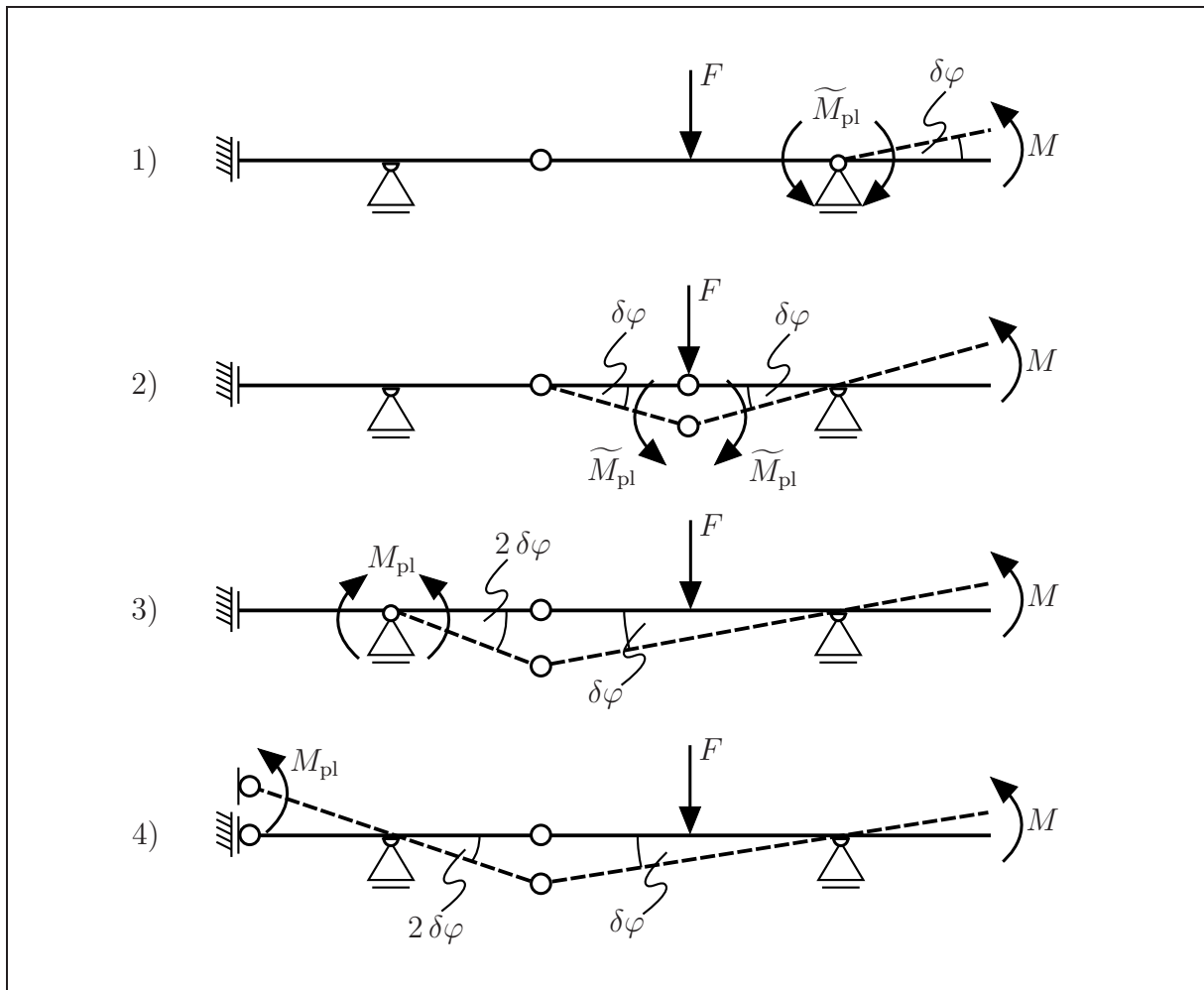
**Aufgabe 2** (Seite 1 von 3)



a)

Das dargestellte Balkensystem soll unter Berücksichtigung von Plastizität bemessen werden. Spannungen infolge von Quer- und Normalkräften können dabei vernachlässigt werden. Die plastischen Grenzmomente seien für den linken Balken mit  $M_{pl}$  und für den rechten mit  $\tilde{M}_{pl}$  gegeben. Abmessungen, Belastungen und Lagerungen sind der Skizze zu entnehmen.

Im folgenden Kästchen sind bereits Positionen möglicher Fließgelenke und die dazu jeweils korrespondierende Auslenkung des Systems dargestellt. Ergänzen Sie die Zeichnungen um sämtliche plastische Momente und äußere Lasten! **(2,0 Punkte)**



**Aufgabe 2** (Seite 2 von 3)

Zeichnen Sie nun Winkelbezeichnungen für die ausgelenkten Lagen ein und geben Sie sämtliche auftretenden Winkelbeziehungen für kleine Auslenkungen des Systems an! Stellen Sie dann, abhängig von nur **einem** Freiheitsgrad, den jeweiligen Ausdruck für die virtuelle Arbeit  $\delta W_i$  auf! **(2,0 Punkte)**

$$\delta W_1 = [M - \widetilde{M}_{\text{pl}}] \delta \varphi$$

$$\delta W_3 = [M + Fl - 2 M_{\text{pl}}] \delta \varphi$$

$$\delta W_2 = [M + Fl - 2 \widetilde{M}_{\text{pl}}] \delta \varphi$$

$$\delta W_4 = [M + Fl - 2 M_{\text{pl}}] \delta \varphi$$

Es gelte im Folgenden  $M = 1/2 Fl$  und  $\widetilde{M}_{\text{pl}} = 3/2 M_{\text{pl}}$ . Bestimmen Sie für jede Konfiguration die Grenzwerte  $F_i^{\text{grenz}}$  in Abhängigkeit von  $M_{\text{pl}}$ , mit welcher das System gemäß der Fließgelenktheorie maximal belastet werden kann! **(2,0 Punkte)**

$$F_1^{\text{grenz}} = 3 \frac{M_{\text{pl}}}{l}$$

$$F_3^{\text{grenz}} = \frac{4}{3} \frac{M_{\text{pl}}}{l}$$

$$F_2^{\text{grenz}} = 2 \frac{M_{\text{pl}}}{l}$$

$$F_4^{\text{grenz}} = \frac{4}{3} \frac{M_{\text{pl}}}{l}$$

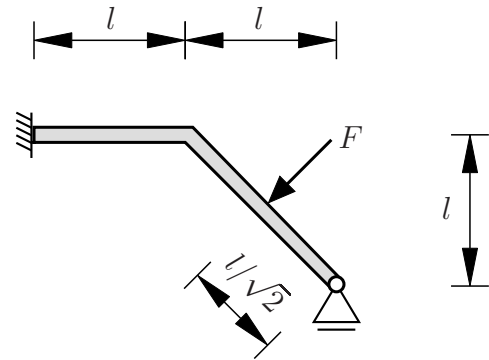
Geben Sie nun den maßgeblichen Grenzwert für das Gesamtsystem an! **(0,5 Punkte)**

$$F_{\text{gesamt}}^{\text{grenz}} = \frac{4}{3} \frac{M_{\text{pl}}}{l}$$

**Aufgabe 2** (Seite 3 von 3)

b) Das nebenstehend abgebildete Balkensystem besteht aus einem abgewinkelten und wie gezeigt gelagerten Balken. Zeichnen Sie alle für dieses System möglichen Fließgelenketten in das folgende Kästchen! Skizzieren Sie außerdem die ausgelenkten Lagen unter Angabe der geltenden Winkelbeziehungen für kleine Auslenkungen des Systems!

(3,5 Punkte)

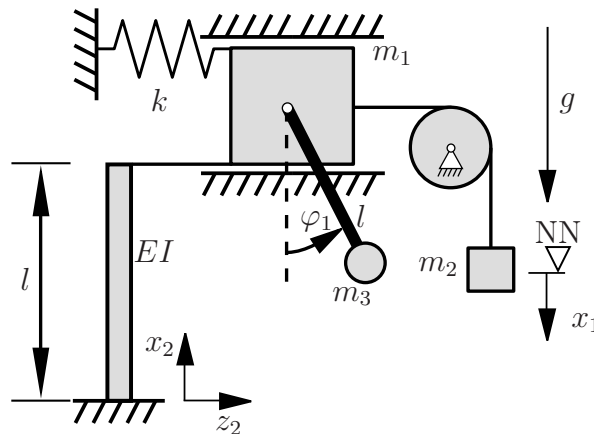


$\delta\varphi = \delta\Phi$

$3\delta\varphi = \delta\Phi$

**Aufgabe 3** (Seite 1 von 4)

Das dargestellte System besteht aus einem Biegebalken (Biegesteifigkeit  $EI$ , Länge  $l$ ), zwei starren Masseblöcken (Masse  $m_1$ , bzw.  $m_2$ ), welche über Seile miteinander verbunden sind, sowie einem starren Pendel (Länge  $l$ ) mit einer Punktmasse am Ende (Masse  $m_3$ ). An der Masse  $m_1$  ist des weiteren eine Feder (Federsteifigkeit  $k$ ) befestigt, welche für den Zustand  $x_1 = 0$  ungespannt ist. Die Masse  $m_1$  gleitet widerstandslos in ihrer Lagerung und das System befindet sich im Schwerfeld der Erde (Erdbeschleunigung  $g$ ). Das Nullniveau wurde so gewählt, dass weder  $m_2$  noch  $m_3$  im Zustand  $x_1 = \varphi_1 = 0$  potentielle Energie besitzen. Das System soll unter der Annahme stets gespannter Seile betrachtet werden.



a)

Geben Sie die kinematischen und dynamischen Randbedingungen der Biegelinie  $w(x_2)$  des Biegebalkens für das dargestellte System an, die zur eindeutigen Lösung der Differentialgleichung vierter Ordnung notwendig sind.

**Hinweis:** Falls inhomogene Randbedingungen vorliegen sind diese in Abhängigkeit vorgegebener Größen bzw. der kinematischen Freiheitsgrade zu formulieren. **(2,0 Punkte)**

$$w(0) = 0$$

$$w'(0) = 0$$

$$w''(l) = 0$$

$$w(l) = x_1$$

**Aufgabe 3** (Seite 2 von 4)

b)

Beschreiben Sie kurz in Worten wie Sie prüfen können, ob ein Ansatz  $\tilde{w}(x_2)$  für die Biegelinie des Balkens kinematisch zulässig ist. Beschreiben Sie des Weiteren kurz in Worten wie Sie die Freiwerte eines Ansatzes gemäß dem Ritzverfahren bestimmen können.

**(1,5 Punkte)**

- Einsetzen des Ansatzes in die RB.
  
- Potential  $\Pi$  des Balkens aufstellen.
  - Minimum des Potentials bestimmen.
  - Freiwerte ermitteln.

c)

Die Biegelinie des Balkens sei durch

$$w(x_2) = \frac{1}{2l^3} x_1 [3l x_2^2 - x_2^3]$$

gegeben. Bestimmen Sie das Potential  $\Pi$  des gesamten Systems in Abhängigkeit der Freiheitsgrade  $x_1$  und  $\varphi_1$ .

**Hinweis:** Evtl. auftretende Integrale sollen ausgewertet werden. **(2,0 Punkte)**

$$\Pi = \frac{3}{2} EI \frac{x_1^2}{l^3} + \frac{1}{2} k x_1^2 - m_2 g x_1 + m_3 g [l - \cos(\varphi_1)l]$$



**Aufgabe 3** (Seite 3 von 4)

d)

Für ein Alternatives System wurde das Potential

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi} = & -2mgx + \frac{31}{2}kx^2 + 3mg \left[ \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}l \cos(\varphi) \right] \\ & + k \left[ \frac{1}{2}l + x - \frac{1}{2}l \cos(\varphi) \right]^2 + \frac{1}{8}k^*l^2 \sin(\varphi)^2\end{aligned}$$

bestimmt. Welche Bedingungen müssen für die Federsteifigkeiten  $k$  und  $k^*$  gelten, damit der Zustand  $x = 2l$ ,  $\varphi = 0$  ein Gleichgewichtszustand ist. Geben Sie wichtige Schritte des Lösungsweges im nachfolgenden Kästchen an. **(3,0 Punkte)**

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial x} &= -2mg + 31kx + 2k \left[ \frac{1}{2}l + x - \frac{1}{2}l \cos(\varphi) \right] \\ \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial x} \Big|_{x=2l, \varphi=0} &= -2mg + 66kl = 0 \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{33} \frac{mg}{l}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \varphi} &= \frac{3}{2}mgl \sin(\varphi) + kl \left[ \frac{1}{2}l + x - \frac{1}{2}l \cos(\varphi) \right] \sin(\varphi) + \frac{1}{4}k^*l^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \varphi} \Big|_{x=2l, \varphi=0} &= 0 = 0 \\ \Rightarrow k^* &\text{ beliebig}\end{aligned}$$

**Aufgabe 3** (Seite 4 von 4)

Erläutern Sie kurz in Worten welche Bedingung unter Verwendung eines Gesamtpotenzials  $\Pi$  allgemein erfüllt sein muss, damit die für bestimmte Werte der Koordinaten  $x = x^*$  und  $\varphi = \varphi^*$  vorliegende Gleichgewichtslage des zugehörigen Systems als **stabil** bezeichnet werden kann. Geben Sie zudem an, wie Sie dies in geeigneter Form praktisch umsetzen können. (1,5 Punkte)

- Die Hessematrix ausgewertet an der Stelle  $x = x^*$ ,  $\varphi = \varphi^*$  muss positiv definit sein.

- Hessematrix  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial x} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \end{bmatrix}$  aufstellen und an der Stelle  $x = x^*$ ,  $\varphi = \varphi^*$  auswerten, d.h.  $\mathbf{H}|_{x=x^*, \varphi=\varphi^*}$

- Eigenwerte von  $\mathbf{H}|_{x=x^*, \varphi=\varphi^*}$  bestimmen, diese müssen für positive Definitheit größer als Null sein.  
Alternativ: Alle Unterdeterminanten von  $\mathbf{H}|_{x=x^*, \varphi=\varphi^*}$  müssen größer als Null sein.