TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

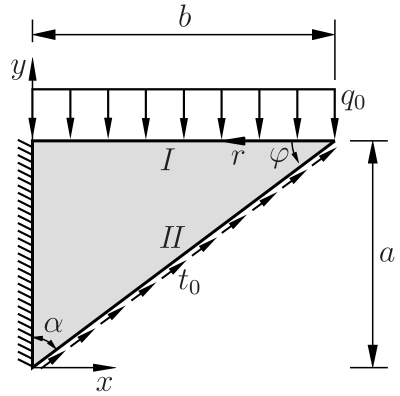
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)

Der nebenstehend skizzierte, dreieckförmige Körper ist auf der linken Seite eingespannt. Er wird wie dargestellt durch Traktionen q_0 (Einheit N/m^2) auf dem Rand I und t_0 (Einheit N/m^2) auf dem Rand II belastet.

Geben Sie sämtliche Spannungs-Randbedingungen des Systems für die Ränder I und II jeweils **in beiden Koordinatensystemen** (x, y und r, φ) an. Nennen Sie dazu auch wesentliche und notwendige Zwischenschritte im nachfolgenden Kästchen. (**4,0 Punkte**)



Rand I: $x, y = a, \quad r, \varphi = 0$

Rand II: $x, y = x \cdot a/b, \quad r, \varphi = 90° - \alpha$

x, y Koordinatensystem:

$$\boldsymbol{n}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{n}_{II} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_I = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q_0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_{II} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \cos(\alpha) - \sigma_{xy} \sin(\alpha) \\ \sigma_{yx} \cos(\alpha) - \sigma_{yy} \sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \sin(\alpha) \\ t_0 \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

r, φ Koordinatensystem:

$$\boldsymbol{n}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{n}_{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_I = \begin{pmatrix} -\sigma_{r\varphi} \\ -\sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_0 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_{II} = \begin{pmatrix} \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Für die Lösung eines nicht weiter spezifizierten Problems unter Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes wurde die Airysche Spannungsfunktion

$$F = C_1 \left[x^4 - 3\,x^2\,y^2 \right] + C_2 \left[x^5 - 5\,x^3\,y^2 \right]$$

verwendet.

Berechnen Sie die Spannungen $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ und σ_{yy} ohne die Konstanten C_1 und C_2 zu spezifizieren. **(2,0 Punkte)**

$$\sigma_{xx}(x,y) = -6\,x^2\,C_1 - 10\,x^3\,C_2$$

$$\tau_{xy}(x,y) = 12\,x\,y\,C_1 + 30\,x^2\,y\,C_2$$

$$\tau_{yx}(x,y) = 12\,x\,y\,C_1 + 30\,x^2\,y\,C_2$$

$$\sigma_{yy}(x,y) = (12\,x^2 - 6\,y^2)\,C_1 + (20\,x^3 - 30\,x\,y^2)\,C_2$$

Berechnen Sie für die gegebene Randbedingung $\sigma_{yy}(x=-a, y=a)=0$ das Verhältnis der Konstanten C_1/C_2. **(1,0 Punkte)**

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{5}{3}\,a$$

Berechnen Sie die Spannungen σ_{xx} und τ_{xy} an der Stelle $x = a$ für beliebige y unter Berücksichtigung des von Ihnen berechneten Verhältnisses von C_1/C_2. **(1,0 Punkte)**

$$\sigma_{xx}(x=a, y) = 0$$

$$\tau_{xy}(x=a, y) = 10\,a^2\,y\,C_2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)

Für eine nicht dargestellte Scheibe (ebener Spannungszustand, keine volumenhaft verteilten Kräfte) wurde die räumliche Verteilung der Spannungen zu

$$\sigma_{xx}(x,y) = 2\,C_0\left[\,x^3\,y - C_1\,x\,y^3\,\right]$$
$$\tau_{xy}(x,y) = -C_0\left[\,C_2\,x^2\,y^2 - y^4\,\right]$$
$$\sigma_{yy}(x,y) = C_0\,C_3\,x\,y^3$$

berechnet.

Bestimmen Sie für den Fall des statischen Gleichgewichts die Konstanten C_1, C_2 und C_3 für beliebige Werte x und y. **(2,0 Punkte)**

Anmerkung:

Aus der Funktion $F = -1/5\,C_0\left(-\dfrac{5}{3}\,x^3\,y^3 + x\,y^5\right)$ hergeleitet.

Anschließend wurden die Konstanten C_1, C_2 und C_3 eingeführt.

$C_1 = 2$

$C_2 = 3$

$C_3 = 2$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

In dieser Aufgabe sollen biegebelastete Strukturen unter der Annahme idealplastischen Materialverhaltens ausgelegt werden.

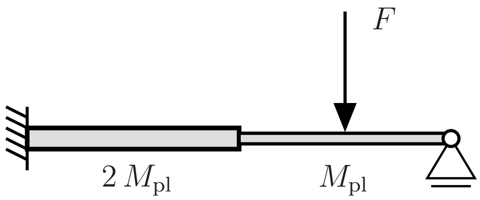
a)
Erklären Sie in wenigen Worten folgende Größen: **(1,5 Punkte)**

Fließspannung: Spannung, bei der der Werkstoff (in der äußeren Faser des Querschnitts) zu fließen beginnt.

vollplastisches Moment: Maximales Moment, das ein Querschnitt aufnehmen kann, bei dem er voll plastifiziert ist.

plastische Tragreserve: Reserve zwischen Plastifizierung der äußeren Faser und voller Plastifizierung des Querschnitts.

b)
Der nebenstehend abgebildete, abgestufte Biegebalken kann in den beiden Bereichen die angegeben vollplastischen Momente aufnehmen.



Wie viele Fließgelenke sind für die Auslegung nach der Fließgelenktheorie notwendig? **(0,5 Punkte)**

2

Zeichnen Sie alle für dieses System möglichen Fließgelenkketten in das Kästchen auf der nächsten Seite ein. Nutzen Sie dazu die aus Vorlesung und Übung bekannten kritischen Stellen. Skizzieren Sie außerdem gestrichelt die ausgelenkten Lagen und zeichnen Sie alle vollplastischen Momente und Lasten ein. **(3,0 Punkte)**

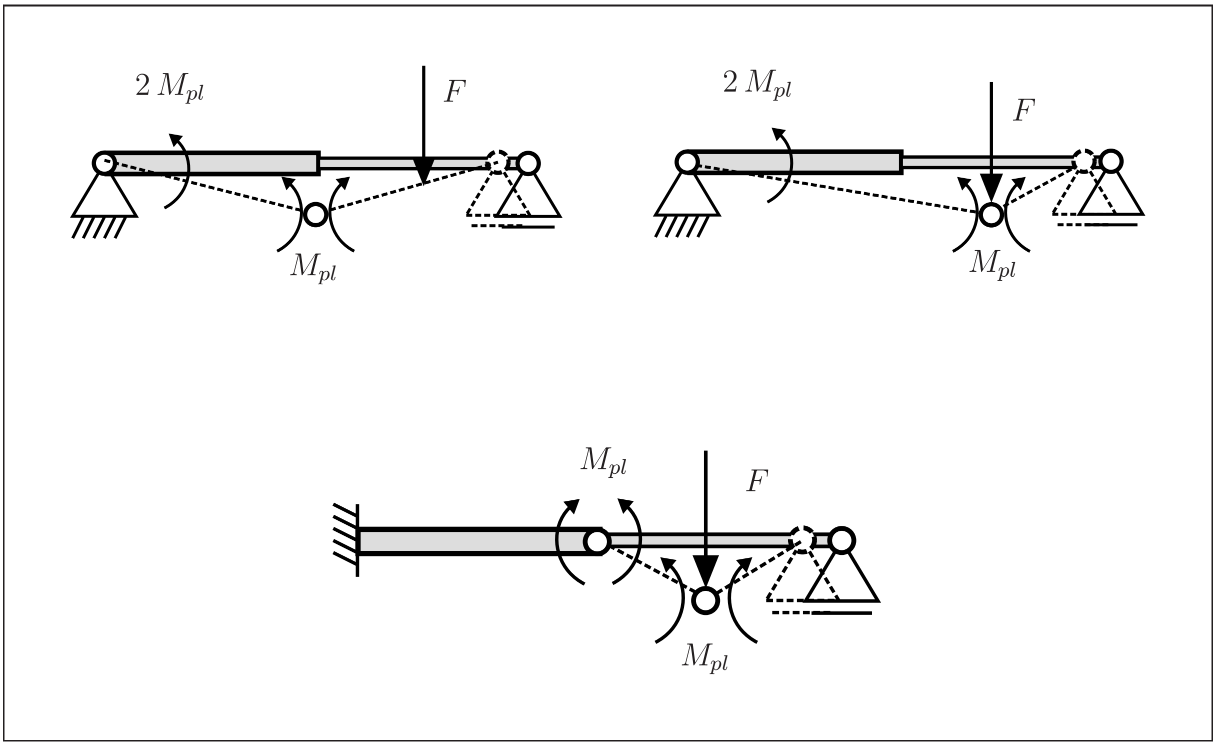
TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

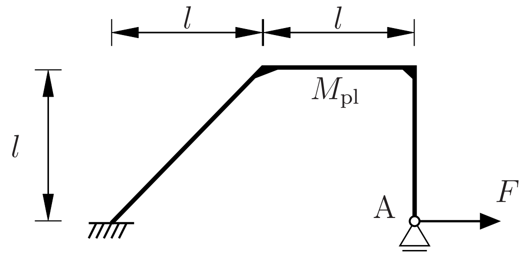
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

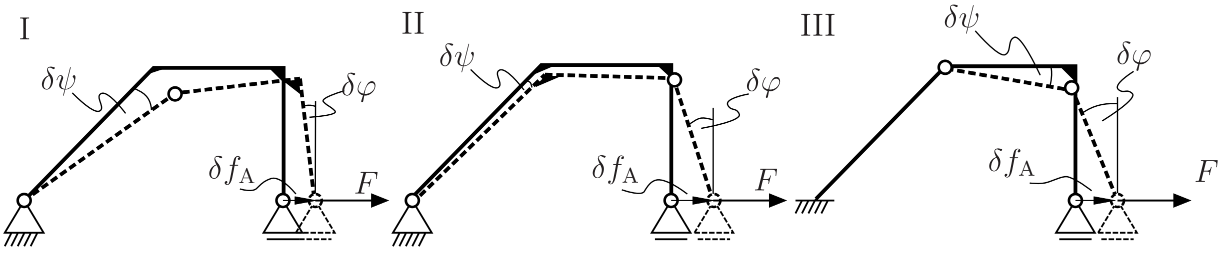
Matr.-Nr.: ____________________



c)
Das nebenstehend abgebildete Balkensystem weist ein vollplastisches Moment der Größe M_{pl} auf. Eine Kraft F greift im Punkt A an.



Im Folgenden sind drei Fließgelenkketten dargestellt. Die Auslenkungen sind zur Verdeutlichung größer dargestellt.



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

Geben Sie die kinematischen Beziehungen für **kleine Auslenkungen** des Systems in Abhängigkeit von $\delta\varphi$ an. **(3,0 Punkte)**

I: $\delta\psi = \delta\varphi$ $\quad$ $\delta f_{\mathrm{A}} = 2\,\delta\varphi\,l$

II: $\delta\psi = 0$ $\quad$ $\delta f_{\mathrm{A}} = \delta\varphi\,l$

III: $\delta\psi = 0$ $\quad$ $\delta f_{\mathrm{A}} = \delta\varphi\,l$

Bestimmen Sie für jede Konfiguration die Grenzwerte F_{krit} in Abhängigkeit von M_{pl}, mit welcher das System unter elastoplastischer Verformung maximal belastet werden kann.
Hinweis: Falls sie die kinematischen Bindungen nicht angeben konnten, geben Sie die kritischen Kräfte in Abhängigkeit von M_{pl} sowie $\delta\varphi$, $\delta\psi$ und δf_{A} an. **(1,5 Punkte)**

$$F_{\mathrm{krit}\ I} = \frac{2\,M_{\mathrm{pl}}\,\delta\psi + M_{\mathrm{pl}}\,\delta\varphi}{\delta f_{\mathrm{A}}} = \frac{3\,M_{\mathrm{pl}}}{2\,l}$$

$$F_{\mathrm{krit}\ II} = \frac{2\,M_{\mathrm{pl}}\,\delta\psi + M_{\mathrm{pl}}\,\delta\varphi}{\delta f_{\mathrm{A}}} = \frac{M_{\mathrm{pl}}}{l}$$

$$F_{\mathrm{krit}\ III} = \frac{2\,M_{\mathrm{pl}}\,\delta\psi + M_{\mathrm{pl}}\,\delta\varphi}{\delta f_{\mathrm{A}}} = \frac{M_{\mathrm{pl}}}{l}$$

Geben Sie nun den maßgeblichen Grenzwert F_{grenz} für das Gesamtsystem an. **(0,5 Punkte)**

$F_{\mathrm{grenz}} = \frac{M_{\mathrm{pl}}}{l}$

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

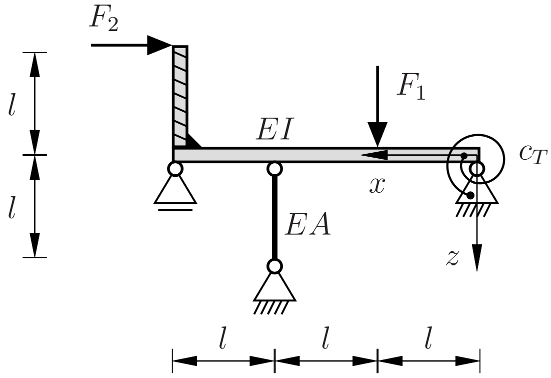
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

Das dargestellte System besteht aus einem Biegebalken (Biegesteifigkeit EI, $EA \to \infty$, Länge $3\,l$), einer Pendelstütze (Dehnsteifigkeit EA, $EI \to \infty$, Länge l), sowie einem biege- und dehnstarren Balken (schraffiert, $EI \to \infty$, $EA \to \infty$, Länge l). Des Weiteren ist an der Stelle $x = 0$ eine Drehfeder (Federsteifigkeit c_T) befestigt, welche für den dargestellten Zustand ungespannt ist. Das System ist durch die beiden Kräfte F_1 und F_2 belastet.



a)
Geben Sie das Gesamtpotenzial $\Pi(w, w', w'')$ des Systems in integraler Form und unter Verwendung von allgemeinen, nicht spezifizierten Ausdrücken für die Biegelinie an. Für den gesamten Biegebalken wird eine Biegelinie $w(x)$ mit $0 \le x \le 3\,l$ angenommen. Es ist dabei eine eindeutige Bezeichnung der jeweiligen Größen zu verwenden.

(3,0 Punkte)

$$\Pi = \frac{c_T}{2}\,(w'(0))^2 + \frac{1}{2}\int_0^{3\,l} E\,I\,(w''(x))^2\;\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{l} E\,A\left(\frac{w(2\,l)}{l}\right)^2\;\mathrm{d}x$$
$$- F_1\,w(l) - F_2\,l\,w'(3\,l)$$

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

b)
Geben Sie die wesentlichen Randbedingungen an, die eine für das Ritz-Verfahren zulässige Ansatzfunktion erfüllen muss. Spezifizieren Sie damit den Näherungsansatz vom Typ

$$w_h(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i\, x^i \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 3\,l\ .$$

Geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit der Freiwerte a_2 und a_3 an.

(1,5 Punkte)

$$w_h(0) = 0\ , \quad w_h(3\,l) = 0$$
$$\Rightarrow\ w_h = -\,(3\,a_2 + 9\,a_3)\,l\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3$$

c)
Für ein alternatives System wurde das Potential

$$\widetilde{\Pi}(\varphi,\psi) = k_1\left[\sin(\varphi)^2 + [\sin(\varphi)+\sin(\psi)]^2\right] - F\,k_2\,[2 - \cos(\varphi) - \cos(\psi)]$$

bestimmt. Welche Bedingungen müssen für die Kraft F gelten, damit der Zustand $\varphi = 0$, $\psi = 0$ eine stabile Gleichgewichtslage ist. Geben Sie wichtige Schritte des Lösungsweges im nachfolgenden Kästchen an.

(5,5 Punkte)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ________________

Nachname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

$$\widetilde{\Pi} \approx k_1 \left[\varphi^2 + (\varphi + \psi)^2\right] - F\,\frac{k_2}{2}\left(\varphi^2 + \psi^2\right)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial \varphi} = 2\,k_1\,(2\,\varphi + \psi) - F\,k_2\,\varphi\ , \quad \frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial \psi} = 2\,k_1\,(\varphi + \psi) - F\,k_2\,\psi$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\Pi}}{\partial \varphi\,\partial \varphi} = 4\,k_1 - F\,k_2\ , \quad \frac{\partial^2 \widetilde{\Pi}}{\partial \varphi\,\partial \psi} = 2\,k_1\ , \quad \frac{\partial^2 \widetilde{\Pi}}{\partial \psi\,\partial \psi} = 2\,k_1 - F\,k_2$$

$$D_1 = \det\,(4\,k_1 - F\,k_2) > 0 \quad \Rightarrow \quad F < 4\frac{k_1}{k_2}$$

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 4\,k_1 - F\,k_2 & 2\,k_1 \\ 2\,k_1 & 2\,k_1 - F\,k_2 \end{pmatrix} = k_2^2\,F^2 - 6\,k_1\,k_2\,F + 4\,k_1^2 > 0$$

$$\Rightarrow\ F > \left(3 + \sqrt{5}\right)\frac{k_1}{k_2} \quad \wedge \quad F < \left(3 - \sqrt{5}\right)\frac{k_1}{k_2}$$

$$\Rightarrow \text{stabil für } F < \left(3 - \sqrt{5}\right)\frac{k_1}{k_2}$$