

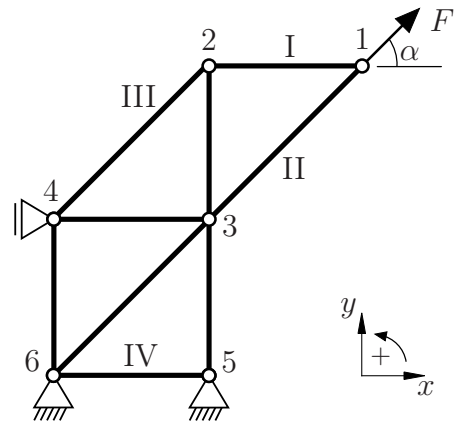
Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

a)

Das nebenstehende Fachwerk soll mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) ausgelegt werden. Dazu müssen in einer Eingabedatei verschiedene Eingabegrößen festgelegt werden.

Bestimmen Sie die Konnektivitätsliste der mit römischen Zahlen nummerierten Elemente basierend auf den gegebenen Knotennummern.

(1,0 Punkte)



Elementnummer	globale Knotennummer
I	1, 2
II	1, 3
III	2, 4
IV	5, 6

Die Liste aller globalen Freiheitsgrade sei wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, \dots]^t$. Bestimmen Sie die Liste **freeDofs**, welche die Freiheitsgradnummern der Neumann-Freiheitsgrade beinhaltet. Geben Sie die dazu korrespondierenden Kräfte \mathbf{f}_{pre} an.

(1,0 Punkte)

$\mathbf{freeDofs} = [$	1	2	3	4	5	6	8	$]$
$\mathbf{f}_{\text{pre}} = [$	$F \cos(\alpha)$	$F \sin(\alpha)$	0	0	0	0	0	$]$

Für das oben abgebildete Fachwerk erfolgt die Diskretisierung anhand von einem Element pro Stab. Geben Sie die Dimension der Element-Steifigkeitsmatrizen \mathbf{K}^e der Elemente an.

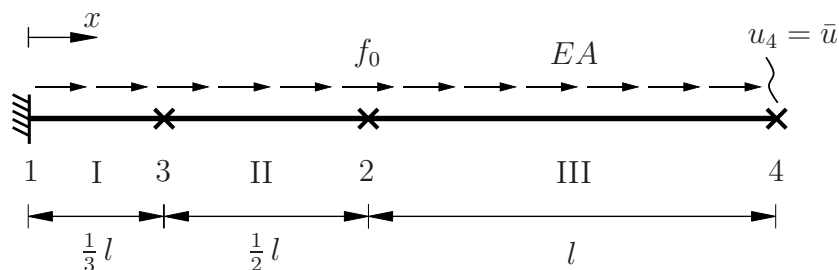
(0,5 Punkte)

Anzahl Zeilen: $\text{nen} * \text{ndf} = 2 * 2 = 4$	Anzahl Spalten: $\text{nen} * \text{ndf} = 2 * 2 = 4$
--	---

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

b)

Es soll nun mittels der FEM ein Stab (Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A) bestehend aus drei Elementen berechnet werden. Der Stab ist am Knoten 1 wie dargestellt gelagert. An Knoten 4 wird die Verschiebung $u_4 = \bar{u}$ aufgeprägt. Der Stab wird durch eine konstante volumenbezogene Last f_0 belastet. Die Diskretisierung erfolgt mit linearen Ansatzfunktionen. Für die Gauß-Quadratur wird ein Gaußpunkt pro Element verwendet.



Die Elementvektoren der Volumenkräfte der drei Elemente sind bestimmt worden zu

$$\mathbf{f}_{\text{vol}}^{e=I} = \frac{1}{6} Al f_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\text{vol}}^{e=II} = \frac{1}{4} Al f_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\text{vol}}^{e=III} = \frac{1}{2} Al f_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assemblieren Sie diese zum globalen Vektor der Volumenkräfte \mathbf{f}_{vol} . Beachten Sie die durch die Skizze vorgegebene Konnektivität. **(1,0 Punkte)**

$$\mathbf{f}_{\text{vol}} = \frac{1}{12} Al f_0 \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Element-Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^{e=III}$ von Element III. **(1,5 Punkte)**

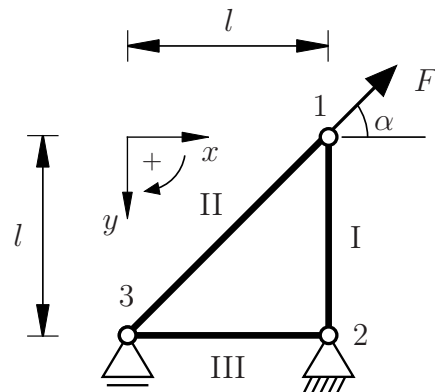
$$\mathbf{K}^{e=III} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

c)

Für das nebenstehende reduzierte Fachwerk bestehend aus drei Stäben (Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A) ist die Liste aller globalen Freiheitsgrade wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, \dots]^t$, sodass $\text{dof} = [3, 4, 6]$ und $\text{freeDofs} = [1, 2, 5]$. Die globale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und die Verschiebungen \mathbf{u}_F wurden bereits mit $a = \sqrt{2}/4$ bestimmt zu

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} a & -a & 0 & 0 & -a & a \\ -a & 1+a & 0 & -1 & a & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & a & -1 & 0 & 1+a & -a \\ a & -a & 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_F = \frac{l}{EA} \begin{bmatrix} [2 + \frac{1}{a}]F_x + F_y \\ F_x + F_y \\ F_x \end{bmatrix}.$$



Extrahieren Sie die Matrizen \mathbf{K}_{DF} und \mathbf{K}_{DD} aus der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} . (1,0 Punkte)

$$\mathbf{K}_{DF} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & -a & -a \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{DD} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

Geben Sie die Gleichung zur Bestimmung der unbekanntenen Reaktionskräfte $\mathbf{f}_{\text{sur}D}$ an. Bestimmen Sie zusätzlich darin enthaltene unbekanntene Größen anhand des oben abgebildeten Systems. Das Ergebnis muss **nicht** berechnet werden. (0,5 Punkte)

$$\mathbf{f}_{\text{sur}D} = \mathbf{K}_{DF} \cdot \mathbf{u}_F + \mathbf{K}_{DD} \cdot \mathbf{u}_D \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Geben Sie eine Möglichkeit zur Verifizierung des obigen Ergebnisses der Reaktionskräfte $\mathbf{f}_{\text{sur}D}$ für das gegebene System an. (0,5 Punkte)

Die Auflagerreaktionen des abgebildeten Fachwerks können mit den Gleichgewichtsbedingungen manuell gelöst und anschließend mit $\mathbf{f}_{\text{sur}D}$ verglichen werden.

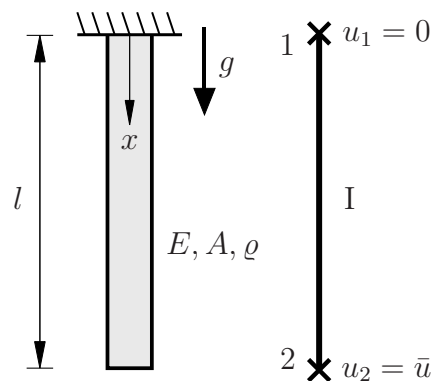
Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

d)

Es soll nun in einem der FEM nachgeschalteten Schritt für den nebenstehenden Stab die aufgenommene interne elastische Energie

$$\Pi_{\text{int}} \approx \Pi_{\text{int}}^h = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \left[\int_{B^e} \frac{1}{2} EA \left[\frac{du^h(x)}{dx} \right]^2 dx \right]$$

bestimmt werden. Die Diskretisierung des Stabes erfolgt mit einem Element. Die Verschiebungen $u_1 = 0$ und $u_2 = \bar{u}$ sind bereits bekannt.



Geben Sie die Koordinatentransformation $x^h(\xi)$ auf das Masterelement für das oben abgebildete System unter der Verwendung von linearen Ansatzfunktionen an. Geben Sie zudem die inverse Funktion $\xi^h(x)$ an. **(1,0 Punkte)**

$$x^h(\xi) = \frac{l}{2} [1 + \xi] \qquad \xi^h(x) = \frac{2}{l} x - 1$$

Geben Sie die Interpolationsfunktion des Verschiebungsfeldes $u^h(\xi)$ auf dem Masterelement für das oben abgebildete System unter der Verwendung von linearen Ansatzfunktionen an. Geben Sie zudem die Ableitung des Verschiebungsfeldes $u^h(\xi)$ bzgl. x an. **(1,0 Punkte)**

$$u^h(\xi) = \frac{\bar{u}}{2} [1 + \xi] \qquad \frac{du^h(\xi)}{dx} = \frac{\partial u^h(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\bar{u}}{l}$$

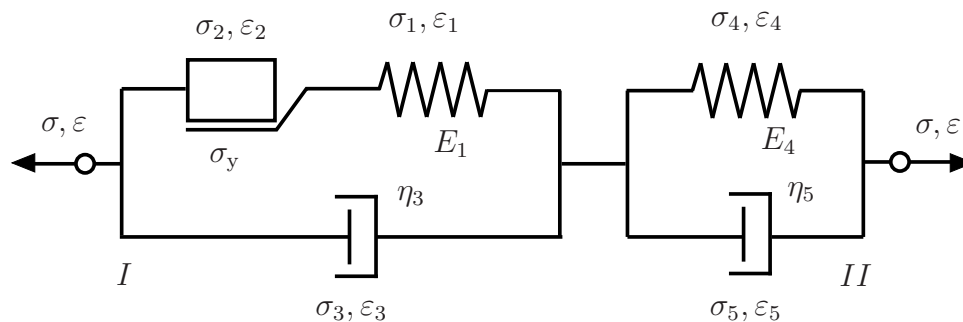
Transformieren Sie das Integral der internen elastischen Energie auf das Masterelement und wenden Sie die Gauß-Quadratur an. Eine allgemeine Formel ist ausreichend. Das Ergebnis muss **nicht** berechnet werden. **(1,0 Punkte)**

$$\begin{aligned} \int_{B^e} \frac{1}{2} EA \left[\frac{du^h(x)}{dx} \right]^2 dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} EA \left[\frac{\partial u^h(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]^2 \frac{\partial x^h(\xi)}{\partial \xi} d\xi \\ &\approx \sum_{p=1}^{n_{\text{qp}}} \frac{1}{2} EA \left[\frac{\partial u^h(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right]^2 \bigg|_{\xi=\xi_p} \frac{\partial x^h(\xi)}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=\xi_p} w_p \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)

Das dargestellte rheologische Modell mit den Elastizitätsmoduli E_1 und E_4 , den Dämpfungskonstanten η_3 und η_5 und der Fließgrenze σ_y wird im Folgenden betrachtet. Die den jeweiligen Teilkörpern zugehörigen Spannungen und Dehnungen σ_\bullet und ε_\bullet mit $\bullet = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sind der Skizze zu entnehmen.



Geben Sie zunächst die Spannung σ_4 und Dehnung ε_4 in der rechten Feder in Abhängigkeit der Größen $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5$ und $\varepsilon, \varepsilon_3$ an. **(1,5 Punkte)**

$$\sigma_4(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5) = \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_5$$

$$\varepsilon_4(\varepsilon, \varepsilon_3) = \varepsilon - \varepsilon_3$$

Gesucht ist nun eine konstitutive Gleichung für die Gesamtspannung σ . Stellen Sie je eine Gleichung für σ anhand der Schaltung der Elemente 1, 2, 3 (I) sowie anhand der Schaltung der Elemente 4, 5 (II) in Abhängigkeit der Größen $\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \varepsilon_1, \dot{\varepsilon}_1, \varepsilon_4, \dot{\varepsilon}_4$ auf. **(2,0 Punkte)**

$$I: \quad \sigma = \eta_3 [\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_4] + E_1 \varepsilon_1$$

$$II: \quad \sigma = E_4 \varepsilon_4 + \eta_5 \dot{\varepsilon}_4$$

Das oben dargestellte rheologische Modell lässt sich auf den Bingham-Hooke-Körper durch die Festlegung von zwei Materialparametern reduzieren. Nennen Sie diese beiden Materialparameter und geben Sie jeweils einen Wert an. **(1,0 Punkte)**

$$E_1 \rightarrow \infty, \quad \eta_5 = 0$$

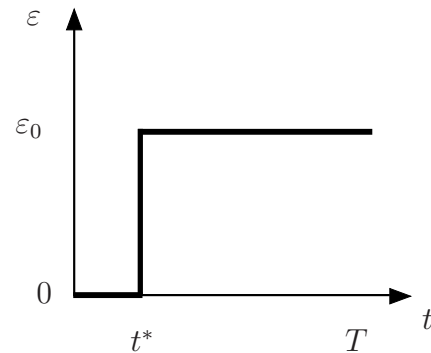
Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

b)

Die Gleichungen zur Lösung eines Bingham-Hooke-Körpers seien als

$$\begin{aligned} \sigma &= E \varepsilon & \text{für } \sigma < \sigma_y \\ \sigma + \eta \dot{\sigma}/E &= \eta \dot{\varepsilon} + \sigma_y & \text{für } \sigma \geq \sigma_y \end{aligned}$$

mit als bekannt vorausgesetzten Materialparametern gegeben. Das System sei mit einer zum Zeitpunkt $t = t^*$ sprunghaft ansteigenden Dehnung $\varepsilon(t)$ mit $\varepsilon_0 = 2\sigma_y/E$ wie dargestellt belastet.



Berechnen Sie für diesen Belastungszustand die Lösungen $\sigma(t)$ in den Bereichen $0 \leq t < t^*$ und $t^* < t \leq T$. Konstanten aus Anfangsbedingungen müssen nicht bestimmt werden. Geben Sie im nachfolgenden Kästchen alle wichtigen Zwischenschritte an.

(2,5 Punkte)Bereich: $0 \leq t < t^*$

$$\sigma(t) = 0$$

Bereich: $t^* < t \leq T$

$$\sigma(t) = c_1 e^{-E/\eta t} + \sigma_y$$

Der Bingham-Hooke-Körper lässt sich auf den Prandtl-Körper durch Festlegung eines Materialparameters reduzieren. Nennen Sie diesen Materialparameter und geben Sie dessen Wert an.

(0,5 Punkte)

$$\eta = 0$$

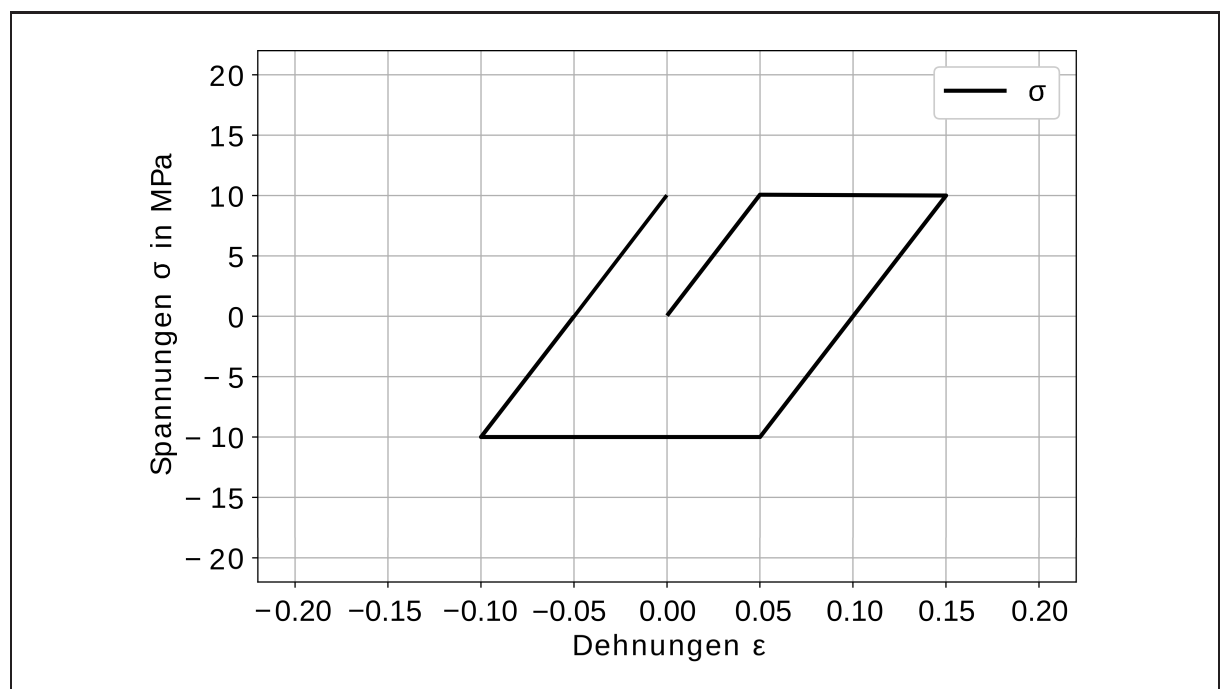
Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

c)

Im Rahmen eines Belastungstests wurde der Dehnungsverlauf $\varepsilon(t)$ für ein anderes Material, welches durch den Prandtl-Körper beschrieben werden kann, mithilfe eines Dehnungsmessstreifens wie folgt gemessen:



Die zugehörige Spannungs-Dehnungs-Kurve, die während des Tests aufgezeichnet wurde, ist im Folgenden dargestellt. Die Kurve wurde allerdings nicht bis zum Ende des Versuchs aufgezeichnet. Vervollständigen Sie die Spannungs-Dehnungs-Kurve bis zum Ende des Tests anhand der gegebenen Dehnungskurve. **(1,5 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau

Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: _____

Nachname: _____

Matr.-Nr.: _____

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

Geben Sie den Elastizitätsmodul E und die Fließgrenze σ_y des Materials an. **(1,0 Punkte)**

$$E = 200 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 10 \text{ MPa}$$

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

a)

Für einen ebenen Spannungszustand eines linear elastischen Materials ist die folgende Airysche Spannungsfunktion gegeben

$$F = C_1 x^5 y + C_2 x^3 y^3.$$

Berechnen Sie die Spannungen σ_{xx} , σ_{xy} und σ_{yy} ohne die Konstanten C_1 und C_2 zu spezifizieren. **(1,5 Punkte)**

$$\sigma_{xx} = 6 C_2 x^3 y$$

$$\sigma_{xy} = -5 C_1 x^4 - 9 C_2 x^2 y^2$$

$$\sigma_{yy} = 20 C_1 x^3 y + 6 C_2 x y^3$$

Prüfen Sie, ob dem Spannungszustand eindeutig ein Verschiebungsfeld zugeordnet werden kann. Geben Sie das entsprechende Kriterium an und bestimmen Sie ggf. das nötige Verhältnis der Konstanten C_1/C_2 . **(1,5 Punkte)**

Prüfe Bipotentialgleichung:

$$\begin{aligned}\Delta\Delta F &= F_{,xxxx} + 2 F_{,xxyy} + F_{,yyyy} \\ &= 120 C_1 x y + 2 \cdot 36 C_2 x y = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_1}{C_2} = -\frac{72}{120}$$

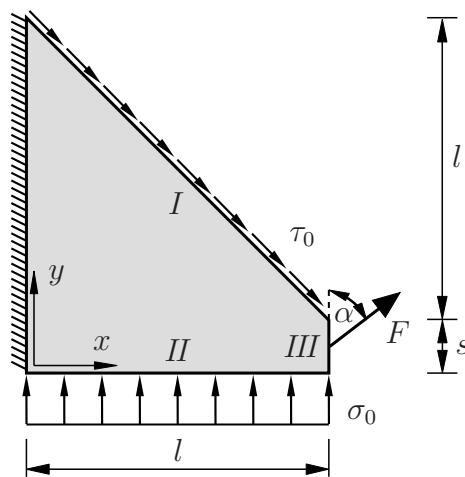
Für das errechnete Verhältnis der Konstanten existiert ein eindeutiges Verschiebungsfeld.

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

b)

Die nebenstehend skizzierte Scheibe der Dicke t ist auf der linken Seite eingespannt und wird wie dargestellt durch Traktionen τ_0 auf Rand *I* und σ_0 auf Rand *II* belastet. Die Kraft F wirkt auf Rand *III* und greift unter dem Winkel α an. Es liegt ein ebener Spannungszustand vor.

Geben Sie sämtliche Spannungs-Randbedingungen des Systems für die Ränder *I*, *II* und *III* an. Nennen Sie dazu auch die Definitionsbereiche für x und y der jeweiligen Spannungskomponenten.

**(3,0 Punkte)**

Rand *I*: für $0 \leq x \leq l$ und $y = l + s - x$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} + \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} + \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

Traktionsvektor aus $\boldsymbol{\sigma}$ muss gleich äußerer Last sein

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} + \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} + \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \tau_0 \\ -\tau_0 \end{bmatrix}$$

Rand *II*:

$$\sigma_{yy}(0 \leq x \leq l, y = 0) = -\sigma_0, \quad \sigma_{xy}(0 \leq x \leq l, y = 0) = 0$$

Rand *III*:

$$\int_0^s \sigma_{xx}(x = 0, 0 \leq y \leq s) t \, dy = \sin(\alpha) F,$$

$$\int_0^s \sigma_{xy}(x = 0, 0 \leq y \leq s) t \, dy = \cos(\alpha) F$$

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

c)

Für ein anderes nicht näher spezifiziertes System sei die Schubspannung

$$\sigma_{13} = -C_1 x_3^2 - \frac{C_2}{2}$$

berechnet worden. Es gelten außerdem die Spannungsrandbedingungen

$$\sigma_{13}(x_1, x_3 = h) = 0, \quad \int_0^h \sigma_{13}(x_1 = 0, x_3) b dx_3 = R,$$

wobei b konstant ist.

Bestimmen Sie die Konstanten C_1 und C_2 .

(2,0 Punkte)

$$C_1 = \frac{3}{2} \frac{R}{bh^3}$$

$$C_2 = -3 \frac{R}{bh}$$

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

d)

Für ein isotropes und linear-elastisches Material (Lamé Parameter λ und μ) wurde ein Verzerrungstensor mit der Koeffizientendarstellung

$$[\varepsilon]_{\mathbf{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} 20 a x_2 x_1 & 5 b x_1^2 + 3 a x_1 x_2 & 0 \\ 5 b x_1^2 + 3 a x_1 x_2 & 6 b x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bestimmt.

Prüfen Sie, für welche Beziehung zwischen den Konstanten a und b sich aus dem gegebenen Verzerrungszustand eindeutig ein zugehöriges Verschiebungsfeld bestimmen lässt.

(1,0 Punkte)

Ebener Verzerrungszustand, Reduktion auf eine Kompatibilitätsbedingung:

$$2 \varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2$$

Geben Sie den zugehörigen Spannungszustand in Koeffizientendarstellung für den Punkt $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$ an.

(1,0 Punkte)

Elastizitätsgesetz in Lamé-Konstanten:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2 \mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma}(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3) = \lambda [20 a + 6 b] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \mu \begin{bmatrix} 20 a & 5 b + 3 a & 0 \\ 5 b + 3 a & 6 b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$