TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

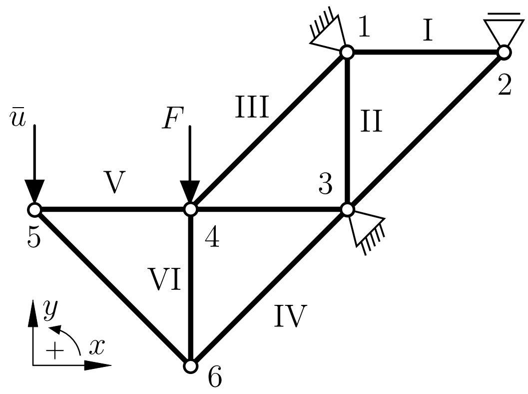
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

a)

Das nebenstehende Fachwerk soll mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) ausgelegt werden.



Betrachten Sie die unten angegebene Konnektivitätsliste für die mit römischen Zahlen nummerierten Elemente. Überprüfen Sie die vorgegebene Konnektivitätsliste basierend auf den gegebenen Knotennummern. Korrigieren Sie fehlerhaft angegebene Konnektivitäte(n). (**1,0 Punkte**)

Elementnummer	globale Knotennummer
I	1, 2
II	1, 3
III	4, 1
IV	~~3, 4~~ $\rightarrow$ 3, 6
V	4, 5
VI	4, 6

Die Liste aller globalen Freiheitsgrade sei wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, ...]^{\mathrm{t}}$. Bestimmen Sie die Liste `drltDoFs`, welche die Nummern der globalen Freiheitsgrade der Dirichlet-Randbedingungen beinhaltet. Geben Sie die dazu korrespondierende Liste der Verschiebungen $\mathbf{u}_D$ an. Beachten Sie das vorgegebene Koordinatensystem. (**1,0 Punkte**)

`drltDoFs` $= [1, \quad 2, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 10]$

$\mathbf{u}_D = [0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad -\bar{u}]$

Für das oben abgebildete Fachwerk erfolgt die Diskretisierung anhand von einem Element pro Stab. Geben Sie die nachfolgenden Dimensionen des Randwertproblems an. (**1,0 Punkte**)

nnp $= 6$ ndf $= 2$ ndm $= 2$ nel $= 9$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

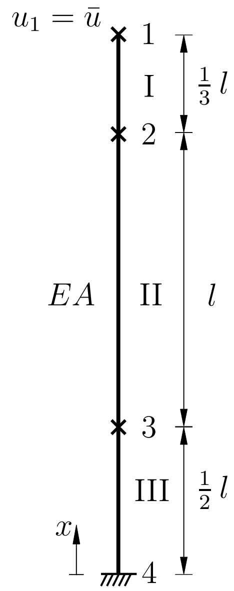
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

b)



Es soll nun mittels der FEM ein Stab (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A) bestehend aus drei Elementen berechnet werden. Der Stab ist am Knoten 4 wie dargestellt gelagert. Am Knoten 1 wird die Verschiebung $u_1 = \bar{u}$ aufgeprägt.

Die Steifigkeitsmatrizen der Elemente sind bestimmt worden zu

$$\mathbf{K}^{e=\mathrm{I}} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{e=\mathrm{II}} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{e=\mathrm{III}} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assemblieren Sie die Element-Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}^e$ zur globalen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$. Beachten Sie dabei die durch die Skizze vorgegebenen Konnektivitäten. **(1,5 Punkte)**

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J^{e=\mathrm{I}}$ für das Element I unter der Verwendung von linearen Ansatzfunktionen. **(0,5 Punkte)**

$$J^{e=\mathrm{I}} = \frac{l^{e=\mathrm{I}}}{2} = \frac{1}{6}\,l$$

Anhand der oben bestimmten Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ sollen nun die diskreten Knoten-Verschiebungen $\mathbf{u}$ berechnet werden. Begründen Sie, warum sich diese nicht direkt durch das lineare Gleichungssystem $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$ berechnen lassen. **(0,5 Punkte)**

Die Matrix $\mathbf{K}$ ist singulär, bzw. hat nicht vollen Rang, da die Dirichlet-Randbedingungen noch nicht berücksichtigt wurden. Die Matrix $\mathbf{K}$ besitzt daher n_{en} Null-Eigenwerte ($\det(\mathbf{K}) = 0$), welche der Anzahl der möglichen Starrkörperbewegungen enstpricht.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

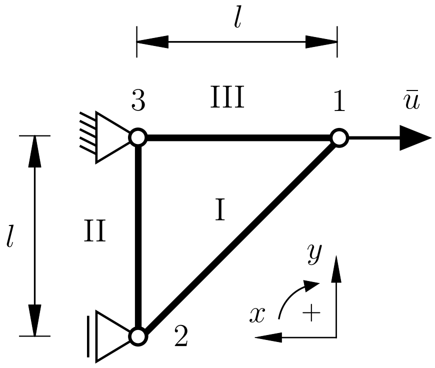
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

c)



Für das nebenstehende Fachwerk bestehend aus drei Stäben (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A) ist die Liste aller globalen Freiheitsgrade wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, ...]^{\mathrm{t}}$, sodass `drltDofs` $= [1, 3, 5, 6]$ und `freeDofs` $= [2, 4]$. Die globale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ wurde bereits mit $a = \sqrt{2}/4$ bestimmt zu

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1+a & -a & -a & a & -1 & 0 \\ -a & a & a & -a & 0 & 0 \\ -a & a & a & -a & 0 & 0 \\ a & -a & -a & 1+a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Extrahieren Sie die Matrizen $\mathbf{K}_{FF}$ und $\mathbf{K}_{FD}$ aus der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$. **(1,0 Punkte)**

$$\mathbf{K}_{FF} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} a & -a \\ -a & 1+a \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{FD} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ a & -a & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Geben Sie die Gleichung zur Bestimmung der gesuchten Verschiebungen $\mathbf{u}_F$ an. Bestimmen Sie zusätzlich darin enthaltene unbekannten Größen anhand des oben abgebildeten Systems. Das Ergebnis muss **nicht** berechnet werden. **(1,0 Punkte)**

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{K}_{FF}^{-1} \cdot [\mathbf{f}_{\mathrm{vol}\,F} + \mathbf{f}_{\mathrm{sur}\,F} - \mathbf{K}_{FD} \cdot \mathbf{u}_D] \quad \text{mit} \quad \mathbf{f}_{\mathrm{vol}\,F} = \mathbf{f}_{\mathrm{sur}\,F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} -\bar{u} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Verschiebung $\bar{u}$ am Knoten 1 soll durch eine äquivalente Kraft $\bar{F}(\bar{u})$ ersetzt werden, sodass sich die selben Knoten-Verschiebungen $\mathbf{u}$ ergeben. Geben Sie eine Formel zur Bestimmung dieser Kraft in Abhängigkeit der bekannten Größen an. **(0,5 Punkte)**

$$\bar{F}(\bar{u}) = \bar{u}\,\frac{E\,A}{l} \qquad \text{aus} \qquad \bar{u} = \frac{F\,l}{E\,A}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

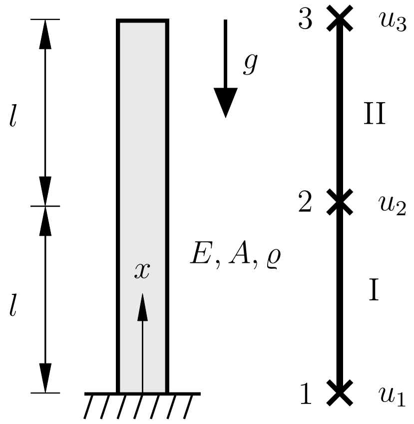
d)

Im Rahmen der Finite-Elemente-Methode wird das Verschiebungsfeld $u(x)$ innerhalb eines Elements über eine polynomiale Interpolation vom Typ

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{B=1}^{n_{\text{en}}} u^{eB} \, L^B(x) \,,$$

$$\text{mit} \quad L^i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_{\text{en}}} \frac{x_j - x}{x_j - x_i}$$

approximiert, wobei $L^i(x)$ die Lagrange-Polynome sind.



Geben Sie für das oben stehende System (Schwerefeld g, Elastizitätsmodul E, Querschnitsfläche A) bestehend aus 2 Elementen das Interpolationspolynom $u^h(x)$ für das Element II an. Die Verschiebungen u_2 und u_3 sind dabei als bekannt anzunehmen. (**1,0 Punkte**)

$$u^h(x) = u_2 \, \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + u_3 \, \frac{x_2 - x}{x_2 - x_3} = u_2 \, \frac{2l - x}{l} - u_3 \, \frac{l - x}{l}$$

Geben Sie die Interpolationsfunktion des Verschiebungsfeldes $u^h(\xi)$ auf dem Masterelement für das Element II unter der Verwendung von linearen Ansatzfunktionen an. (**1,0 Punkte**)

$$u^h(\xi) = u_2 \, \frac{1 - \xi}{2} + u_3 \, \frac{1 + \xi}{2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

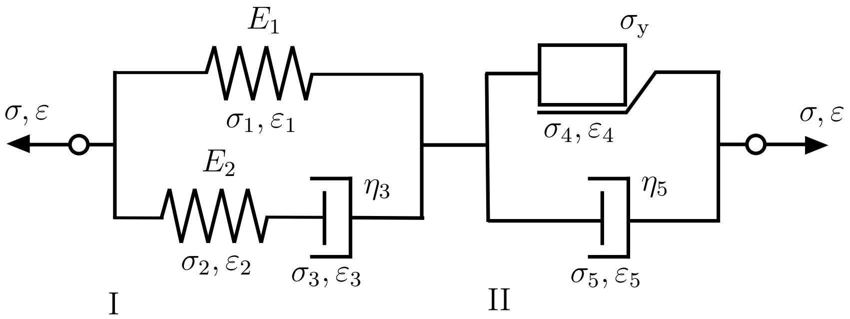
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)

Im Folgenden wird das dargestellte rheologische Modell mit den Elastizitätsmoduli E_1 und E_2, den Dämpfungskonstanten η_3 und η_5 und der Fließgrenze σ_y betrachtet. Die den jeweiligen Teilkörpern zugehörigen Spannungen $\sigma_\bullet$ und Dehnungen $\varepsilon_\bullet$ mit $\bullet = \{1,2,3,4,5\}$ sind der Skizze zu entnehmen.



Geben Sie die Spannung σ_1 in Abhängigkeit der Größen $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_5$ an. (**0,5 Punkte**)

$$\sigma_1(\sigma_2, \sigma_4, \sigma_5) = \sigma_4 + \sigma_5 - \sigma_2$$

Notieren Sie zudem, welche Zusammenhänge zwischen den (Teil-)Dehnungen $\varepsilon_\bullet$ innerhalb des jeweiligen (Teil-)Systems I (Elemente 1,2,3) und II (Elemente 4,5) bestehen. (**1,0 Punkte**)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad \text{und} \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5$$

Geben Sie an, welche Bedingung für die Spannung σ_4 des Reibelementes gelten muss, damit $\varepsilon_5 = 0$ für ein belastetet System ist. (**1,0 Punkte**)

$$\sigma_4 < \sigma_\mathrm{y}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Gesucht ist nun die konstitutive Gleichung für die Gesamtspannung σ. Stellen Sie die entsprechende Gleichung für σ anhand der Schaltung der Elemente $1, 2, 3$ (I) sowie anhand der Schaltung der Elemente $4, 5$ (II) in Abhängigkeit der jeweiligen Teildehnungen $\varepsilon_\bullet$ und $\dot{\varepsilon}_\bullet$ auf. **(1,0 Punkte)**

Fallunterscheidung:

für $\sigma < \sigma_\mathrm{y}$ gilt

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 &&= \sigma_1 + \sigma_3 \\ &= E_1\,\varepsilon_1 + E_2\,\varepsilon_2 &&= E_1\,\varepsilon_1 + \eta_3\,\dot{\varepsilon}_3 \end{aligned}$$

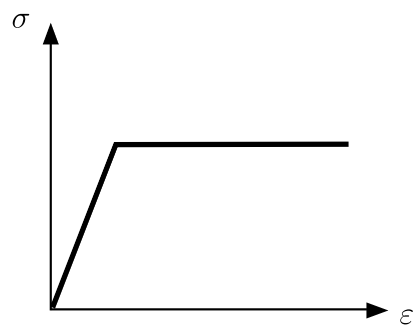
für $\sigma \geq \sigma_\mathrm{y}$ gilt

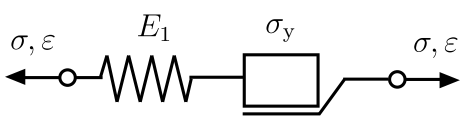
$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_4 + \sigma_5 \\ &= \sigma_\mathrm{y} + \eta_5\,\dot{\varepsilon}_5 \end{aligned}$$

b)

Ein Material weist die nebenstehende Spannungs-Dehnungs-Kurve in Folge einer linear ansteigenden Dehnung auf.

Skizzieren Sie ein passendes rheologisches Modell. **(1,0 Punkte)**





Vorname: ____________________

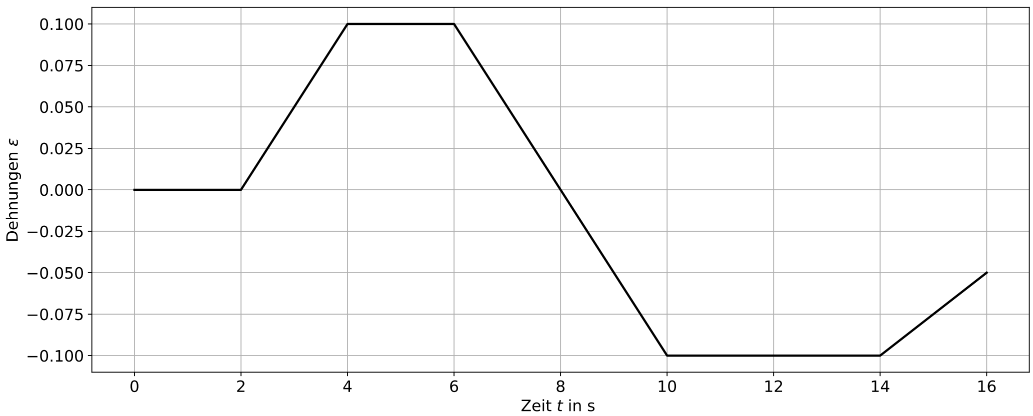
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

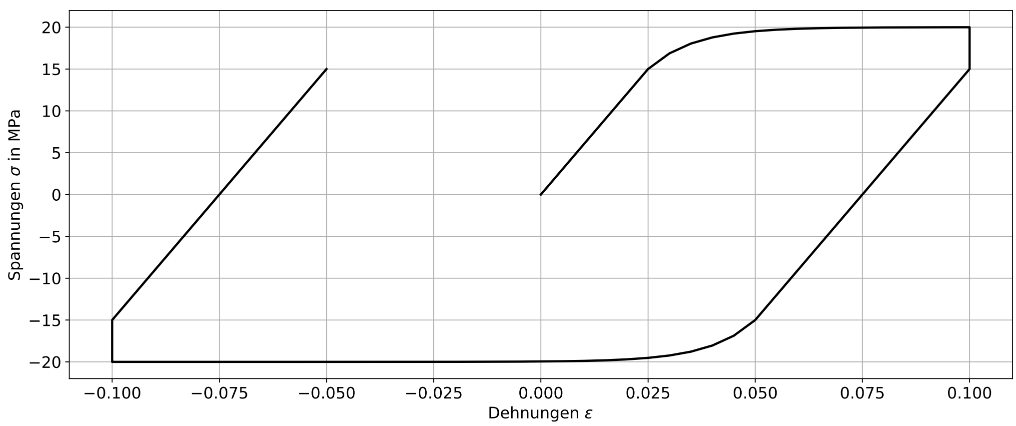
Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

c)

Im Rahmen eines Belastungstests wurde der Dehnungsverlauf $\varepsilon(t)$ für ein Material, welches durch den Bingham-Hooke-Körper beschrieben werden kann, mithilfe eines Dehnungsmessstreifens wie folgt gemessen:



Die zugehörige Spannungs-Dehnungs-Kurve, die während des Tests aufgezeichnet wurde, ist im Folgenden dargestellt. Die Kurve wurde allerdings nicht bis zum Ende des Versuchs aufgezeichnet. Vervollständigen Sie die Spannungs-Dehnungs-Kurve bis zum Ende des Tests anhand der gegebenen Dehnungskurve. Die folgenden Materialparameter sind bekannt: $\eta = 100$ MPa s und $\sigma_{\mathrm{y}} = 15$ MPa. **(2,5 Punkte)**



Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

Geben Sie den Elastizitätsmodul E des Materials an. **(0,5 Punkte)**

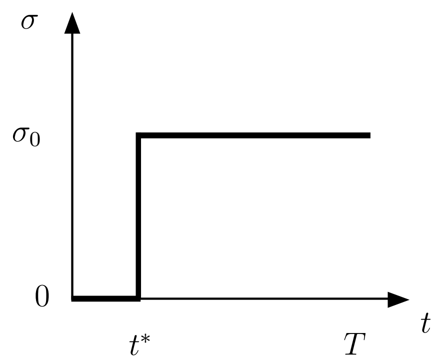
$E = 600\,\mathrm{MPa}$

d)

Das Stoffgesetz eines rheologischen Modells mit als bekannt vorausgesetzten Materialparametern sei gegeben als

$$[E_0 + E_1]\,\sigma + \eta_1\,\dot{\sigma} = E_0\,E_1\,\varepsilon + E_0\,\eta_1\,\dot{\varepsilon}\ .$$

Das System sei mit einer zum Zeitpunkt $t = t^*$ sprunghaft auf das Plateau σ_0 ansteigenden Spannung $\sigma(t)$ wie dargestellt belastet.



Berechnen Sie für diesen Belastungszustand die Lösungen $\varepsilon(t)$ in den Bereichen $0 \le t < t^*$ und $t^* < t \le T$. Konstanten aus Anfangsbedingungen müssen nicht bestimmt werden. Geben Sie im nachfolgenden Kästchen alle wichtigen Zwischenschritte an. **(2,5 Punkte)**

Bereich: $0 \le t < t^*$

$\sigma(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon(t) = 0$

Bereich: $t^* < t \le T$

$\sigma(t) = \sigma_0,\ \dot{\sigma}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon(t) = ?$

$\varepsilon(t) = \varepsilon_\mathrm{h}(t) + \varepsilon_\mathrm{p}(t)$

mit

$\varepsilon_\mathrm{h}(t) = c_1\,e^{\frac{E_1}{\eta_1}\,t}$

$\varepsilon_\mathrm{p}(t) = \frac{E_0+E_1}{E_0\,E_1}\,\sigma_0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

a)

Für einen ebenen Spannungszustand eines isotropen linear elastischen Materials (Elastizitätsmodul E, Querkontraktionszahl ν) ist die folgende Airysche Spannungsfunktion mit den Konstanten c_1 und c_2 gegeben

$$F = x^6 + c_1\, x^4\, y^2 + c_2\, x^2\, y^4\,.$$

Geben Sie die resultierenden Spannungsfunktionen σ_{xx}, σ_{xy} und σ_{yy} an. **(1,5 Punkte)**

$$\sigma_{xx} = \quad 2\, c_1\, x^4 + 12\, c_2\, x^2\, y^2$$

$$\sigma_{xy} = -8\, c_1\, x^3\, y - 8\, c_2\, x\, y^3$$

$$\sigma_{yy} = \quad 30\, x^4 + 12\, c_1\, x^2\, y^2 + 2\, c_2\, y^4$$

Berechen Sie, für welche Werte der Konstanten c_1 und c_2 dem Spannungsfeld $\boldsymbol{\sigma}$ eindeutig ein Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}$ zugeordnet werden kann. Geben Sie Ihre Zwischenschritte an. **(2,0 Punkte)**

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta F &= \Delta\,[F_{,22} + F_{,11}] \\
&= F_{,1111} + 2\, F_{,1122} + F_{,2222} \\
&= \sigma_{yy,11} + 2\, \sigma_{yy,22} + \sigma_{xx,22} \\
&= [360 + 48\, c_1 + 24\, c_2]\, x^2 + [24\, c_1 + 48\, c_2]\, y^2 \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ c_1 = -10\,\mathrm{MPa\,mm^{-4}},\ \ c_2 = 5\,\mathrm{MPa\,mm^{-4}}$$

Geben Sie die Koeffizienten ε_{ij} des resultierenden Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ an. Gehen Sie von einem bekannten Spannungsfeld $\boldsymbol{\sigma}$ aus. **(1,0 Punkte)**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\,[\sigma_{xx} - \nu\, \sigma_{yy}] \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{E}\,[1+\nu]\, \sigma_{xy} \qquad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\,[-\nu\, \sigma_{xx} + \sigma_{yy}] \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\,\nu\,[-\sigma_{xx} - \sigma_{yy}] \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

b)

Ein weiteres isotrop linear elastisches Material sei unter Vernachlässigung von Beschleunigungsbeiträgen nur durch eine volumenhafte Last $\boldsymbol{f}_{\text{vol}}$ belastet. Das sich daraus resultierende Spannungsfeld $\boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2)$ sei in der Koeffizientendarstellung wie folgt gegeben

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} 7\,a\,x_1 + b\,x_2^2 & 10\,a\,x_1 - 5\,a\,x_2 & 0 \\ 10\,a\,x_1 - 5\,a\,x_2 & b\,x_1^2 - 8\,a\,x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sigma_0\,.$$

Geben Sie die volumenhaft verteilte Belastung $\boldsymbol{f}_{\text{vol}}$ in Abhängigkeit von den Konstanten a und b an, sodass sich ein Gleichgewicht in jedem Materialpunkt einstellt.(**1,0 Punkte**)

$$[\boldsymbol{f}_{\text{vol}}]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = -2\,a\,\sigma_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für einen nicht näher spezifizierten belasteten Körper wurde das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}(x_1, x_2, x_3)$ in Koeffizientendarstellung wie folgt ermittelt

$$[\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} 10\,x_1 \\ 5\,x_2 \\ 3\,x_3 \end{bmatrix} \frac{u_0}{l}\,.$$

Das sich daraus ergebende Verzerrungsfeld sei als $\varepsilon_{ij} = 1/2\,[u_{i,j} + u_{j,i}]$ gegeben. Geben Sie die Invarianten $J_1^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und $J_3^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ des resultierenden Verzerrungszustands $\boldsymbol{\varepsilon}$ an. (**1,0 Punkte**)

$$J_1^{\boldsymbol{\varepsilon}} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = 18\,\frac{u_0}{l}$$

$$J_3^{\boldsymbol{\varepsilon}} = u_{1,1}\; u_{2,2}\; u_{3,3} = 150\,\frac{u_0^3}{l^3}$$

Der sich ergebende Verzerrungszustand soll nun um 90° um die $\boldsymbol{e}_3$–Achse rotiert werden. Wie verändern sich dabei die Invarianten $J_1^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ und $J_3^{\boldsymbol{\varepsilon}}$? Begründen Sie ihre Angaben. (**0,5 Punkte**)

Die Invarianten sind invariant gegenüber einer Rotation.

Die Invarianten nehmen daher für beliebige Rotationen gleiche Werte an.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

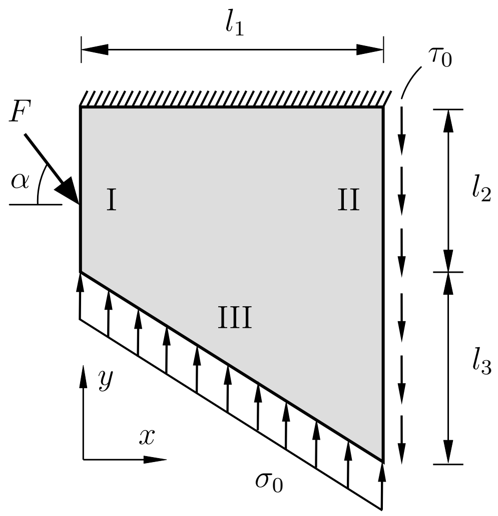
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

c)

Die nebenstehend abgebildete Scheibe der Dicke t ist auf der oberen Seite eingespannt und wird wie dargestellt auf dem Rand I durch eine Kraft F unter dem Winkel α belastet. An den verbleibenden Rändern II und III wirken die Traktionen τ_0 und σ_0. Das resultierende ebene Spannungsfeld $\boldsymbol{\sigma}(x,y)$ sei als bekannt anzunehmen.



Geben Sie die Spannungs-Randbedingungen des Systems an den Rändern I und II an. Geben Sie zusätzlich die jeweiligen Definitionsbereiche für x und y der jeweiligen Spannungskoeffizienten an. Geben Sie Ihre Zwischenschritte an. (**3,0 Punkte**)

Rand I: $x = 0,\ l_3 \le y \le l_3 + l_2, \quad \boldsymbol{t}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{n}^{\mathrm{I}}$ mit $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{\sigma}(x=0,y)$

$$\left[\boldsymbol{t}^{\mathrm{I}}\right]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} -\sigma_{xx}(x=0,y) \\ -\sigma_{xy}(x=0,y) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \left[\boldsymbol{n}^{\mathrm{I}}\right]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F_x^{\mathrm{I}} = \int_{l_3}^{l_3+l_2} t_x^{\mathrm{I}} \,\mathrm{d}A = \int_{l_3}^{l_3+l_2} -\sigma_{xx}(x=0,y)\,t\,\mathrm{d}y = F\cos(\alpha)$$

$$F_y^{\mathrm{I}} = \int_{l_3}^{l_3+l_2} t_y^{\mathrm{I}} \,\mathrm{d}A = \int_{l_3}^{l_3+l_2} -\sigma_{xy}(x=0,y)\,t\,\mathrm{d}y = -F\sin(\alpha)$$

Rand II: $x = l_1,\ 0 \le y \le l_3 + l_2, \quad \boldsymbol{t}^{\mathrm{II}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{n}^{\mathrm{II}}$ mit $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{II}} = \boldsymbol{\sigma}(x=l_1,y)$

$$\left[\boldsymbol{t}^{\mathrm{II}}\right]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(x=l_1,y) \\ \sigma_{xy}(x=l_1,y) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \left[\boldsymbol{n}^{\mathrm{II}}\right]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{xx}(x=l_1,y) = 0$$
$$\sigma_{xy}(x=l_1,y) = -\tau_0$$