

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

a)

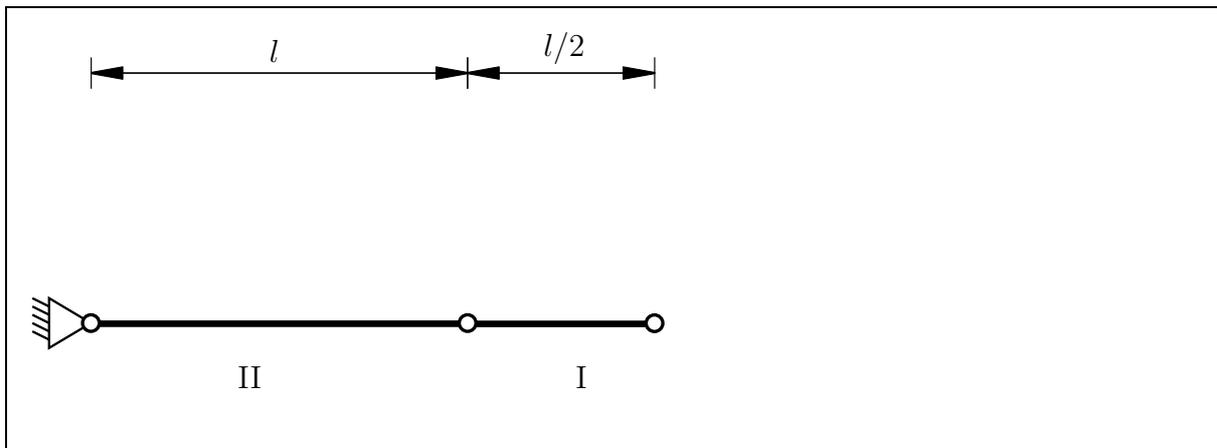
Für ein eindimensionales System bestehend aus zwei Stäben (Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A) sei die FEM-Diskretisierung durch die Konnektivitätsliste gegeben:

Elementnummer	globale Knotennummer
I	1, 2
II	1, 3

Darüber hinaus sind die Steifigkeitsmatrizen der Elemente bestimmt worden zu

$$\mathbf{K}^{e=I} = 2 \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}^{e=II} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

In der Skizze im nachfolgenden Kästchen ist das System abgebildet, welches zur vorgegebenen Konnektivitätsliste gehört. Ergänzen Sie in der Skizze die globalen Knotennummern **(0,5 Punkte)**



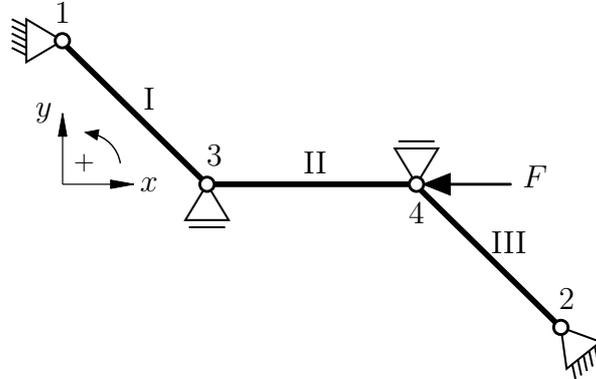
Bestimmen Sie die globale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} unter Beachtung der Konnektivitätsliste. **(1,5 Punkte)**

$\mathbf{K} =$

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

b)

Für das nebenstehende Fachwerk bestehend aus drei Stäben (Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A , Länge l) ist die Liste aller globalen Freiheitsgrade wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, \dots]^t$. Die globale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} wurde bereits bestimmt zu



$$\mathbf{K} = \frac{EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Listen `drltDofs` und `freeDofs`, welche die Freiheitsgradnummern der Dirichlet-Freiheitsgrade bzw. der Neumann-Freiheitsgrade beinhalten. **(1,0 Punkte)**

`drltDofs` = [_____]

`freeDofs` = [_____]

Extrahieren Sie die Matrizen \mathbf{K}_{FF} und \mathbf{K}_{FD} aus der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} . **(1,5 Punkte)**

$\mathbf{K}_{FF} =$ _____ $\mathbf{K}_{FD} =$ _____

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

Geben Sie den gesamten Verschiebungsvektor \mathbf{u} an. Tragen Sie wesentliche Berechnungsschritte in das nachfolgende Kästchen ein. **(2,0 Punkte)**

Hinweis: Wenn Sie die vorherigen Aufgaben nicht lösen konnten, beschreiben Sie hier den Lösungsweg, um Teilpunkte zu erhalten.

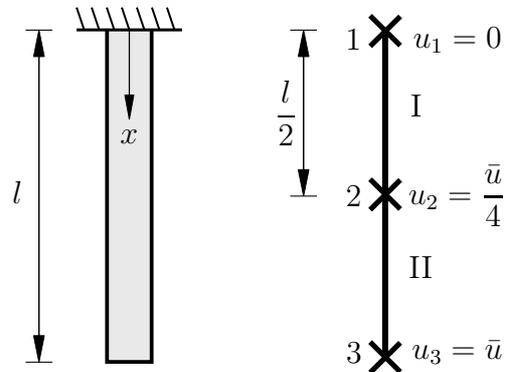
$\mathbf{u} =$

Aus welchem Grund ergeben sich die Nullen in den ersten beiden Zeilen und Spalten der gegebenen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ? Geben Sie eine kurze Antwort ohne Rechnung. **(1,0 Punkte)**

Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

c)

Im Rahmen der FEM soll eine Diskretisierung des nebenstehenden Stabes mit zwei Elementen und **linearen** Ansatzfunktionen durchgeführt werden. Die Verschiebungen $u_1 = 0$, $u_2 = \bar{u}/4$ und $u_3 = \bar{u}$ sind als bekannt anzunehmen.



Geben Sie die Koordinatentransformation $x_{II}^h(\xi)$ von Element II auf das Masterelement für das oben abgebildete System an. Geben Sie zudem die inverse Funktion $\xi_{II}^h(x)$ für das gleiche Element an. **(1,0 Punkte)**

$x_{II}^h(\xi) =$
 $\xi_{II}^h(x) =$

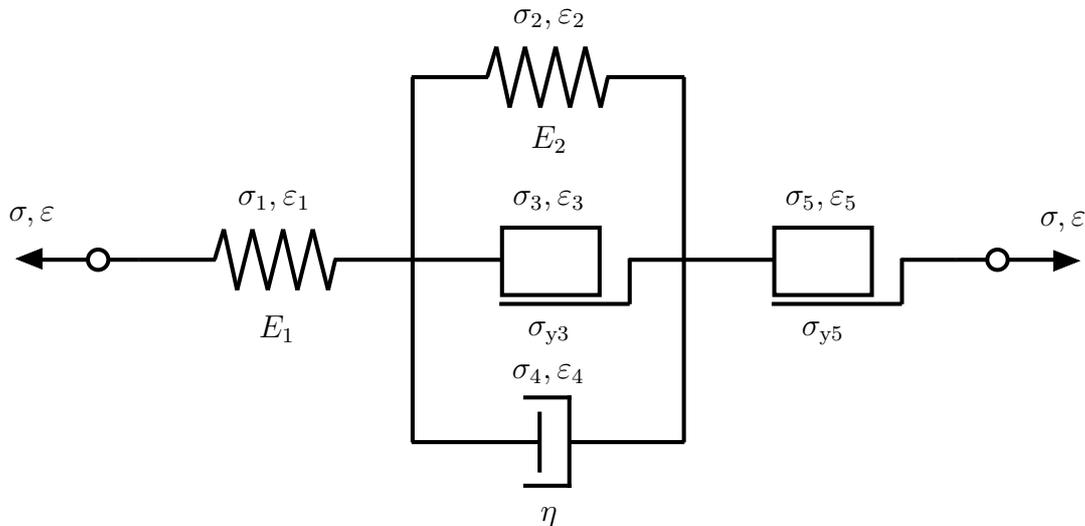
Geben Sie die Interpolationsfunktion des Verschiebungsfelds $u_{II}^h(\xi)$ von Element II bezüglich des Masterelementes für das oben abgebildete System an. Geben Sie zudem die Ableitung des Verschiebungsfeldes $u_{II}^h(\xi)$ des gleichen Elements bzgl. x an. **(1,5 Punkte)**

$u_{II}^h(\xi) =$
 $\frac{du_{II}^h(\xi)}{dx} =$

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)

Im Folgenden wird das unten dargestellte rheologische Modell mit den Elastizitätsmoduli E_1 und E_2 , den Fließgrenzen $\sigma_{y3} < \sigma_{y5}$ und der Dämpfungskonstanten η betrachtet. Die den jeweiligen Teilkörpern zugehörigen Spannungen σ_\bullet und Dehnungen ε_\bullet mit $\bullet = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sind der Skizze zu entnehmen. Im Ausgangszustand sind alle Dehnungen ε_\bullet identisch Null.



Geben Sie die Spannung σ_2 in Abhängigkeit der Spannungen $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4$ an. **(0,5 Punkte)**

$$\sigma_2(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4) =$$

Geben Sie die Dehnung ε_4 in Abhängigkeit der Dehnungen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_5$ an. **(0,5 Punkte)**

$$\varepsilon_4(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_5) =$$

Geben Sie die Beziehung zwischen den Spannungen σ_3, σ_5 für $\varepsilon_2 = 0$ und $\dot{\varepsilon}_4 = 0$ an. **(0,5 Punkte)**

$$\sigma_3(\sigma_5) =$$

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Im Folgenden werden die Spannungen σ_{\bullet} und Dehnungen ε_{\bullet} der Teilkörper als **nicht** bekannt angenommen. Die Gesamtdehnung ε sowie die Materialparameter $E_1, E_2, \sigma_{y3}, \sigma_{y5}, \eta$ sind bekannt. Gehen Sie zudem von einer monoton steigenden Belastung mit $\dot{\varepsilon} > 0$ aus.

Geben Sie eine Gleichung für die Gesamtspannung σ im Fall $\sigma_3 < \sigma_{y3}$ und $\sigma_5 < \sigma_{y5}$ an.
(1,0 Punkte)

$$\sigma =$$

Geben Sie eine Gleichung für die Gesamtspannung σ im Fall $\sigma_3 = \sigma_{y3}$ und $\sigma_5 = \sigma_{y5}$ an.
(0,5 Punkte)

$$\sigma =$$

Geben Sie eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Materialantwort im Fall $\sigma_3 = \sigma_{y3}$ und $\sigma_5 < \sigma_{y5}$ an.
(2,0 Punkte)

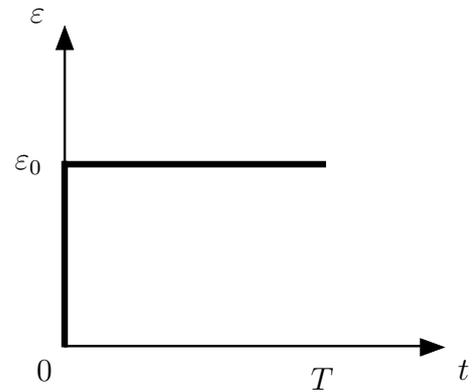
Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

b)

Für das zuvor im Aufgabenteil a) eingeführte rheologische Modell wurde die Differentialgleichung zur Bestimmung der plastischen Dehnung ε_5 für $t > 0$ mit $\alpha_0 = \text{konst.}$ zu

$$\varepsilon + \frac{\eta}{E_2} \dot{\varepsilon} + \alpha_0 = \varepsilon_5 + \frac{\eta}{E_2} \dot{\varepsilon}_5$$

bestimmt. Die Materialparameter η , E_2 und α_0 sind gegeben. Das System wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer von Null auf das Plateau ε_0 sprunghaft ansteigenden Dehnung $\varepsilon(t)$ wie dargestellt belastet. Infolge dieser Belastung wird das betrachtete Reibelement (σ_{y5}) aktiv.

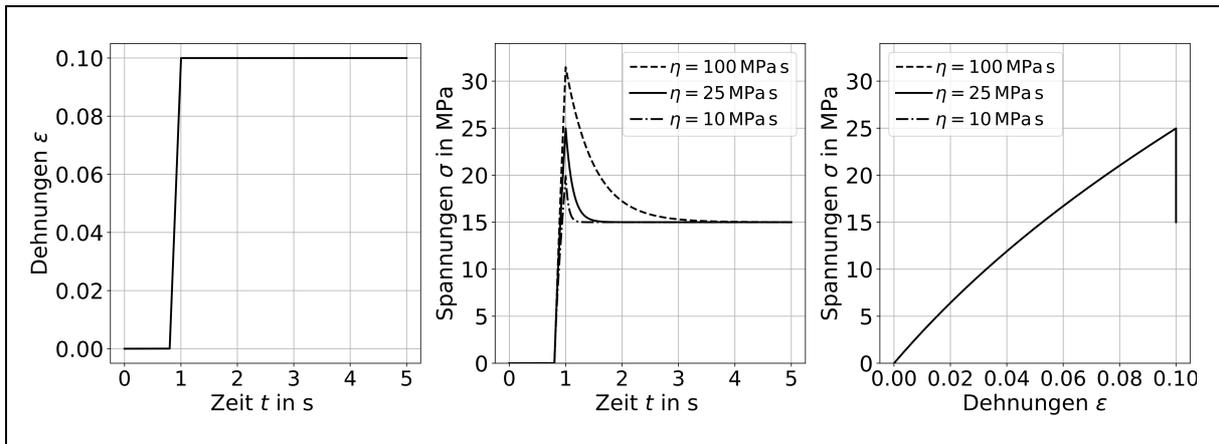


Berechnen Sie für diesen Belastungszustand die Lösung $\varepsilon_5(t)$ im **Bereich** $0 < t < T$. Konstanten aus Anfangsbedingungen sollen **nicht** bestimmt werden. Geben Sie im nachfolgenden Kästchen alle wichtigen Zwischenschritte an. **(2,5 Punkte)**

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

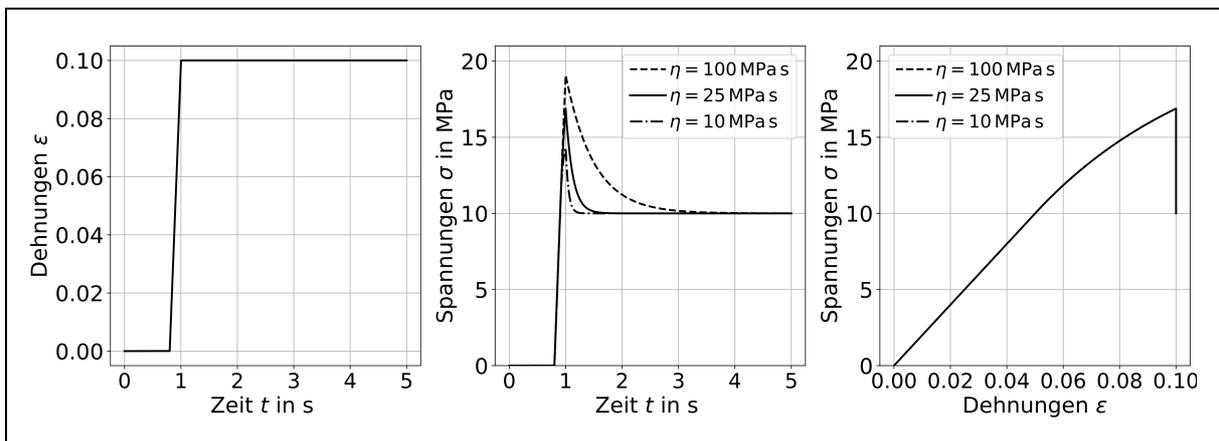
c)

Für ein **viskoelastisches** Material und den in der folgenden Abbildung links vorgegebenen Dehnungsverlauf ergeben sich die in der mittleren Abbildung dargestellten zeitlichen Verläufe der Spannungen. Ergänzen Sie das rechte Spannungs-Dehnungs-Diagramm um die Spannungs-Dehnungs-Verläufe für die Viskositätsparameterwerte $\eta = 10 \text{ MPa s}$ und $\eta = 100 \text{ MPa s}$. **(1,0 Punkte)**



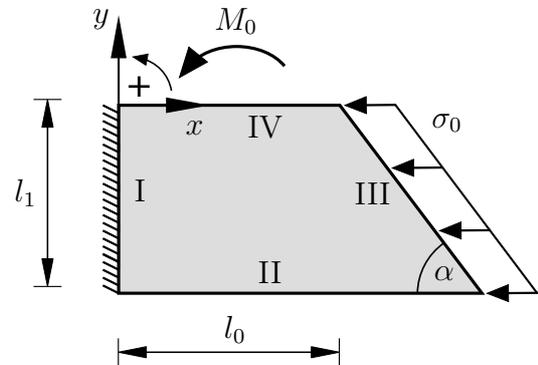
Nennen Sie die Bezeichnung eines geeigneten rheologischen Modells für dieses Materialverhalten. **(0,5 Punkte)**

Für ein **elasto-viskoplastisches** Material und den in der folgenden Abbildung links vorgegebenen Dehnungsverlauf ergeben sich die in der mittleren Abbildung dargestellten zeitlichen Verläufe der Spannungen. Ergänzen Sie das rechte Spannungs-Dehnungs-Diagramm um die Spannungs-Dehnungs-Verläufe für die Viskositätsparameterwerte $\eta = 10 \text{ MPa s}$ und $\eta = 100 \text{ MPa s}$. **(1,0 Punkte)**



Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

Die nebenstehend abgebildete Scheibe der Dicke t ist auf der linken Seite eingespannt und wird wie dargestellt durch ein äußeres Moment M_0 sowie eine konstante äußere Spannung σ_0 belastet. Gehen Sie von einem ebenen Spannungszustand aus.



a)

Bestimmen Sie sämtliche Spannungsrandbedingungen (ggf. auch in integraler Form) an den Rändern II, III und IV bzgl. des vorgegebenen (x, y) -Koordinatensystems. **(3,5 Punkte)**

Rand II: $0 \leq x \leq l_0 + \frac{l_1}{\tan(\alpha)}, \quad y = -l_1$

Rand III: $l_0 \leq x \leq l_0 + \frac{l_1}{\tan(\alpha)}, \quad y = [l_0 - x] \tan(\alpha)$

Rand IV: $0 \leq x \leq l_0, \quad y = 0$

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

b)

Zur Beschreibung der Spannungen im obigen System soll die Airy'sche Spannungsfunktion

$$F(x, y) = c_1 x^3 + c_2 x^2 y + c_3 [x^5 - 5 x^3 y^2]$$

untersucht werden, wobei $c_i = \text{konst.}$ (mit $i \in \{1, 2, 3\}$) gelte.

Geben Sie die resultierenden Spannungsfunktionen σ_{xx} , σ_{xy} und σ_{yy} an. **(2,0 Punkte)**

Hinweis: Die Konstanten sollen hier nicht bestimmt werden!

$$\sigma_{xx} =$$

$$\sigma_{xy} =$$

$$\sigma_{yy} =$$

Geben Sie den Vektor der Volumenkräfte \mathbf{f}_{vol} an, für den sich das System in jedem Punkt im Gleichgewicht befindet. Trägheitsterme sind zu vernachlässigen. Notieren Sie wichtige Zwischenschritte und/oder begründen Sie ihre Antwort kurz. **(1,0 Punkte)**

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

Für lineare isotrope Elastizität kann ein Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ aus dem zuvor bestimmten Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ bestimmt werden. Geben Sie an, ob dazu vereinfachend die Formeln des Ebenen Spannungszustandes (ESZ) oder des Ebenen Verzerrungszustandes (EVZ) verwendet werden können (und wenn ja, welche?), oder ob die Formeln für den 3D-Fall benutzt werden müssen. Begründen Sie Ihre Antwort kurz. **(1,0 Punkte)**

Hinweis: Die Formeln müssen hier nicht aufgeführt werden und auch der Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ soll hier nicht berechnet werden!

c)

An einem weiteren Bauteil wurden mittels Digital Image Correlation (DIC), einem kamerabasierten Messsystem, die Verschiebungen der Oberflächenpunkte erfasst. Auf Basis dieser Messdaten wurden für das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u} = u_x \boldsymbol{e}_x + u_y \boldsymbol{e}_y + u_z \boldsymbol{e}_z$ die Beiträge in der x, y -Ebene

$$u_x(x, y) = k_1 x + \frac{1}{3} k_3 x^3, \quad u_y(x, y) = k_2 y - k_3 x^2 y$$

ermittelt, wobei $k_i = \text{konst.}$ (mit $i \in \{1, 2, 3\}$) gilt.

Bestimmen Sie die daraus resultierenden Koeffizienten ε_{xx} , ε_{xy} , ε_{yx} und ε_{yy} des Dehnungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$. **(1,0 Punkte)**

$$\varepsilon_{xx} =$$

$$\varepsilon_{xy} =$$

$$\varepsilon_{yx} =$$

$$\varepsilon_{yy} =$$

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

Zusätzlich zu den mittels Digital Image Correlation (DIC) in der x, y -Ebene erfassten Verschiebungen, wurde auch eine Dehnung in Dickenrichtung (z -Richtung) des Bauteils beobachtet. Diese Dehnung ist technisch bedingt mit dem DIC-System jedoch nicht messbar.

Berechnen Sie den Koeffizienten ε_{zz} des Dehnungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ unter der Annahme eines ebenen Spannungszustands (ESZ) und linearer isotroper Elastizität mit Querkontraktionszahl ν (und Elastizitätsmodul E). **(1,5 Punkte)**

$$\varepsilon_{zz} =$$