TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

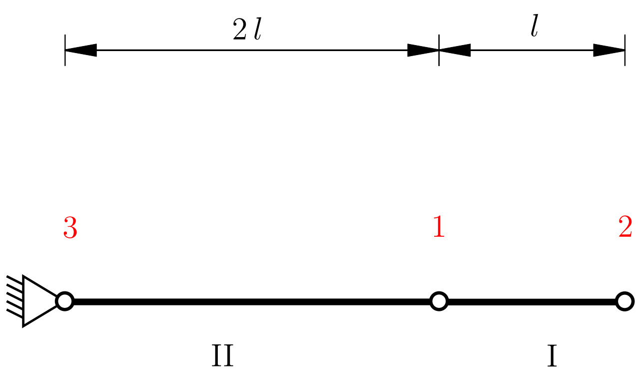
a)
Für ein eindimensionales System (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A, Länge l) sei die Konnektivitätsliste wie folgt gegeben:

Elementnummer	globale Knotennummer
I	1, 2
II	1, 3

Darüber hinaus sind die Steifigkeitsmatrizen der Elemente bestimmt worden zu

$$\mathbf{K}^{e=\mathrm{I}} = 2\,\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}^{e=\mathrm{II}} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

In der Skizze im nachfolgenden Kästchen ist das System abgebildet, welches zur vorgegebenen Konnektivitätsliste gehört. Ergänzen Sie in der Skizze die globalen Knotennummern **(0,5 Punkte)**



Bestimmen Sie die globale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ unter Beachtung der Konnektivitätsliste. **(1,5 Punkte)**

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

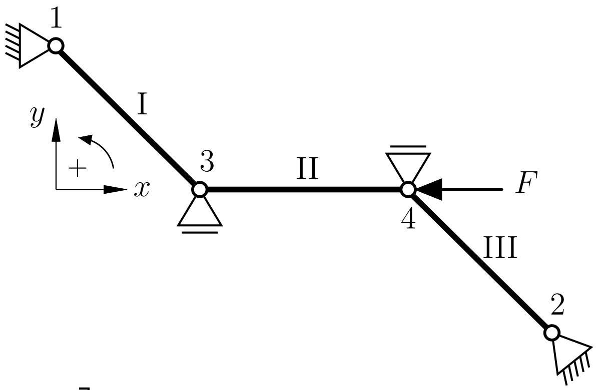
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

b)

Für das nebenstehende Fachwerk bestehend aus drei Stäben (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A, Länge l) ist die Liste aller globalen Freiheitsgrade wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, ...]^t$. Die globale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ wurde bereits bestimmt zu



$$\mathbf{K} = \frac{EA}{2\,l}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Listen `drltDofs` und `freeDofs`, welche die Freiheitsgradnummern der Dirichlet-Freiheitsgrade bzw. der Neumann-Freiheitsgrade beinhalten. (**1,0 Punkte**)

`drltDofs` $= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

`freeDofs` $= \{5, 7\}$

Extrahieren Sie die Matrizen $\mathbf{K}_{FF}$ und $\mathbf{K}_{FD}$ aus der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$. (**1,5 Punkte**)

$$\mathbf{K}_{FF} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \frac{EA}{2\,l} \qquad \mathbf{K}_{FD} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{EA}{2\,l}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Geben Sie den gesamten Verschiebungsvektor **u** an. Tragen Sie wesentliche Berechnungsschritte in das nachfolgende Kästchen ein. **(2,0 Punkte)**
Hinweis: Wenn Sie die vorherigen Aufgaben nicht lösen konnten, beschreiben Sie hier den Lösungsweg um Teilpunkte zu erhalten.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} \frac{F\,l}{5\,EA}$$

Aus welchem Grund ergeben sich die Nullen in den ersten beiden Zeilen und Spalten der gegebenen Steifigkeitsmatrix **K**? Geben Sie eine kurze Antwort ohne Rechnung. **(1,0 Punkte)**

Die zu den entsprechenden Freiheitsgraden gehörigen Knoten haben jeweils keine Verbindung, d.h. gehören keinem gemeinsamen Element an. In Bezug auf die genannten Zeilen und Spalten sind das hier die Knoten 1 und 2 sowie 1 und 4, welche nicht direkt miteinander verbunden sind.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

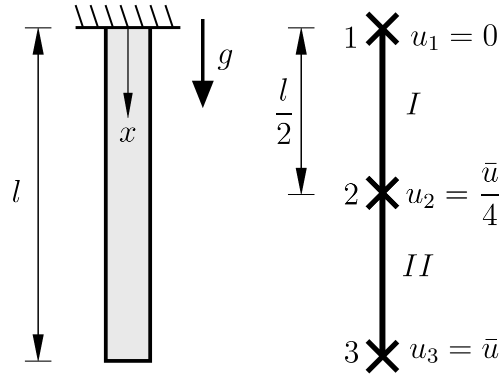
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

c)

Im Rahmen der FEM soll eine Diskretisierung des nebenstehenden Stabes mit zwei Elementen und **linearen** Ansatzfunktionen durchgeführt werden. Die Verschiebungen $u_1 = 0$, $u_2 = \bar{u}/4$ und $u_3 = \bar{u}$ sind als bekannt anzunehmen.



Geben Sie die Koordinatentransformation $x^h_{II}(\xi)$ von Element II auf das Masterelement für das oben abgebildete System an. Geben Sie zudem die inverse Funktion $\xi^h_{II}(x)$ für das gleiche Element an. **(1,0 Punkte)**

$$x^h_{II}(\xi) = \frac{1}{2}[1-\xi]\frac{l}{2} + \frac{1}{2}[1+\xi]l = \frac{3\,l}{4} + \frac{l}{4}\xi \qquad \xi^h_{II}(x) = \frac{4}{l}\,x - 3$$

Geben Sie die Interpolationsfunktion des Verschiebungsfelds $u^h_{II}(\xi)$ von Element II auf das Masterelement für das oben abgebildete System an. Geben Sie zudem die Ableitung des Verschiebungsfeldes $u^h_{II}(\xi)$ des gleichen Elements bzgl. x an. **(1,5 Punkte)**

$$u^h_{II}(\xi) = \frac{1}{2}[1-\xi]\frac{\bar{u}}{4} + \frac{1}{2}[1+\xi]\bar{u} = \frac{5}{8}\bar{u} + \frac{3}{8}\bar{u}\,\xi \qquad \frac{\mathrm{d}u^h_{II}(\xi)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial\, u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{3}{2}\frac{\bar{u}}{l}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

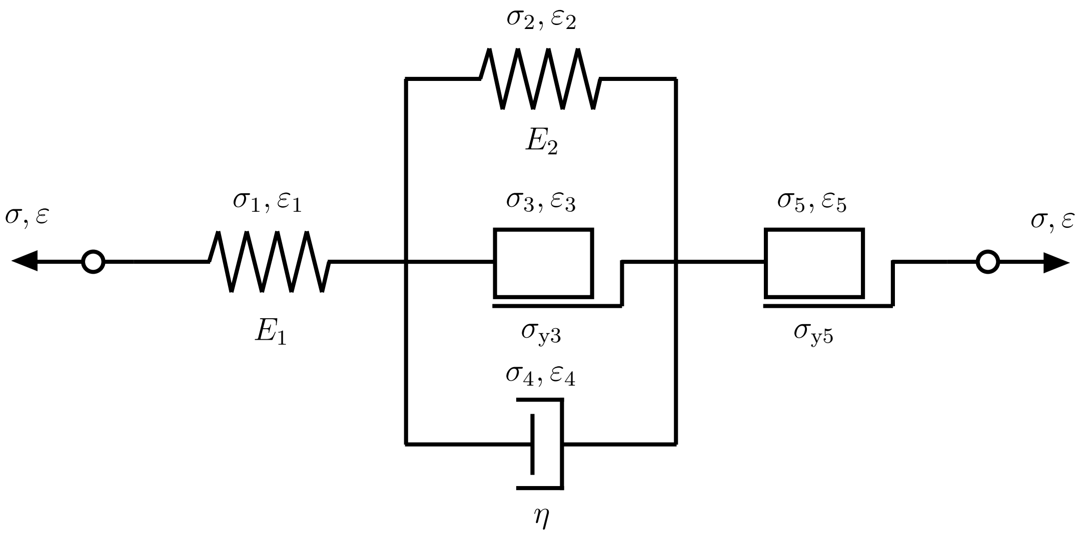
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)

Im Folgenden wird das unten dargestellte rheologische Modell mit den Elastizitätsmoduli E_1 und E_2, den Fließgrenzen $\sigma_{y3} < \sigma_{y5}$ und der Dämpfungskonstanten η betrachtet. Die den jeweiligen Teilkörpern zugehörigen Spannungen $\sigma_\bullet$ und Dehnungen $\varepsilon_\bullet$ mit $\bullet = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sind der Skizze zu entnehmen. Im Ausgangszustand sind alle Dehnungen $\varepsilon_\bullet$ identisch Null.



Geben Sie die Spannung σ_2 in Abhängigkeit der Spannungen $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4$ an. (**0,5 Punkte**)

$\sigma_2(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4) = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_4$

Geben Sie die Dehnung ε_4 in Abhängigkeit der Dehnungen $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_5$ an. (**0,5 Punkte**)

$\varepsilon_4(\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_5) = \varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon_5$

Geben Sie die Beziehung zwischen den Spannungen σ_3, σ_5 für $\varepsilon_2 = 0$ und $\dot{\varepsilon}_4 = 0$ an. (**0,5 Punkte**)

$\sigma_3(\sigma_5) = \sigma_5$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Im Folgenden werden die Spannungen $\sigma_\bullet$ und Dehnungen $\varepsilon_\bullet$ der Teilkörper als **nicht** bekannt angenommen. Die Gesamtdehnung ε sowie die Materialparameter $E_1, E_2, \sigma_{\mathrm{y}3}, \sigma_{\mathrm{y}5}, \eta$ sind bekannt. Gehen Sie zudem von einer monoton steigenden Belastung mit $\dot{\varepsilon} > 0$ aus.

Geben Sie eine Gleichung für die Gesamtspannung σ im Fall $\sigma_3 < \sigma_{\mathrm{y}3}$ und $\sigma_5 < \sigma_{\mathrm{y}5}$ an. **(1,0 Punkte)**

$$\sigma = E_1\,\varepsilon$$

Geben Sie eine Gleichung für die Gesamtspannung σ im Fall $\sigma_3 = \sigma_{\mathrm{y}3}$ und $\sigma_5 = \sigma_{\mathrm{y}5}$ an. **(0,5 Punkte)**

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{y}5}$$

Geben Sie eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Materialantwort im Fall $\sigma_3 = \sigma_{\mathrm{y}3}$ und $\sigma_5 < \sigma_{\mathrm{y}5}$ an. **(2,0 Punkte)**

Parallelschaltung:

$$\sigma = \sigma_{234} = \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = E_2\,\varepsilon_2 + \sigma_{\mathrm{y}3} + \eta\,\dot{\varepsilon}_4$$

Reihenschaltung:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_{234} + \varepsilon_5 \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{234} = \varepsilon_2 = \varepsilon_4 \quad \text{und} \quad \varepsilon_5 = 0$$

$$\rightarrow \quad \varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 = \varepsilon - \frac{\sigma_1}{E_1} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_1} \quad (\checkmark)$$

$$\rightarrow \quad \dot{\varepsilon}_4 = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_1} \quad (\checkmark)$$

Differentialgleichung:

$$\sigma = E_2\,\varepsilon_2 + \sigma_{\mathrm{y}3} + \eta\,\dot{\varepsilon}_4 = E_2\left[\varepsilon - \frac{\sigma}{E_1}\right] + \sigma_{\mathrm{y}3} + \eta\left[\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E_1}\right] \quad (\checkmark)$$

$$\rightarrow \quad \frac{E_1 + E_2}{E_1}\,\sigma + \frac{\eta}{E_1}\,\dot{\sigma} = E_2\,\varepsilon + \eta\,\dot{\varepsilon} + \sigma_{\mathrm{y}3}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

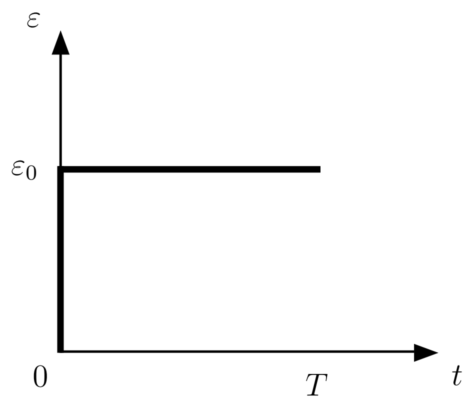
Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

b)

Für das zuvor im Aufgabenteil a) eingeführte rheologische Modell wurde die Differentialgleichung zur Bestimmung der plastischen Dehnung ε_5 für $t > 0$ mit $\alpha_0 = \text{konst.}$ zu

$$\varepsilon + \frac{\eta}{E_2}\,\dot{\varepsilon} + \alpha_0 = \varepsilon_5 + \frac{\eta}{E_2}\,\dot{\varepsilon}_5$$

bestimmt. Die Materialparameter η, E_2 und α_0 sind gegeben. Das System wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer von Null auf das Plateau ε_0 sprunghaft ansteigenden Dehnung $\varepsilon(t)$ wie dargestellt belastet. Infolge dieser Belastung wird das betrachtete Reibelement (σ_{y5}) aktiv.



Berechnen Sie für diesen Belastungszustand die Lösung $\varepsilon_5(t)$ im **Bereich** $\boldsymbol{0 < t < T}$. Konstanten aus Anfangsbedingungen sollen **nicht** bestimmt werden. Geben Sie im nachfolgenden Kästchen alle wichtigen Zwischenschritte an. **(2,5 Punkte)**

Bereich $0 < t < T$

$\varepsilon(\mathrm{t}) = \varepsilon_0,\ \dot{\varepsilon}(t) = 0$

$\varepsilon_5(t) = \varepsilon_{5\,\mathrm{h}}(t) + \varepsilon_{5\,\mathrm{p}}(t)$

Ansatzfunktionen

$\varepsilon_{5\,\mathrm{h}}(t) = c_1\,\exp(-F(t))$

$\varepsilon_{5\,\mathrm{p}}(t) = c_2 = \text{konst.}$

Teillösungen

$\varepsilon_{5\,\mathrm{h}}(t) = c_1\,\exp\left(-\dfrac{E_2}{\eta}\,t\right)$

$\varepsilon_{5\,\mathrm{p}}(t) = \varepsilon_0 + \alpha_0$

Gesamtlösung

$$\varepsilon_5(t) = \varepsilon_{5\,\mathrm{h}}(t) + \varepsilon_{5\,\mathrm{p}}(t) = c_1\,\exp\left(-\frac{E_2}{\eta}\,t\right) + \varepsilon_0 + \alpha_0 \quad \text{für} \quad 0 < t < T$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

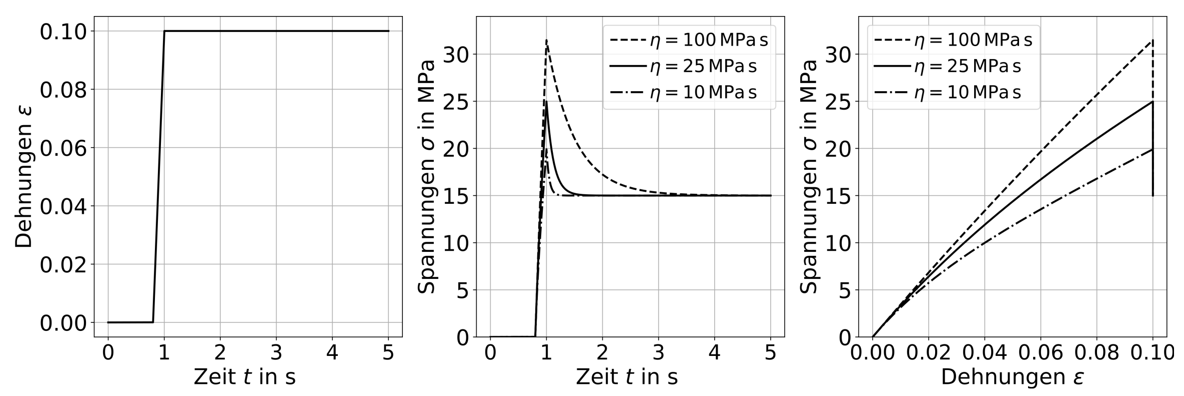
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

c)

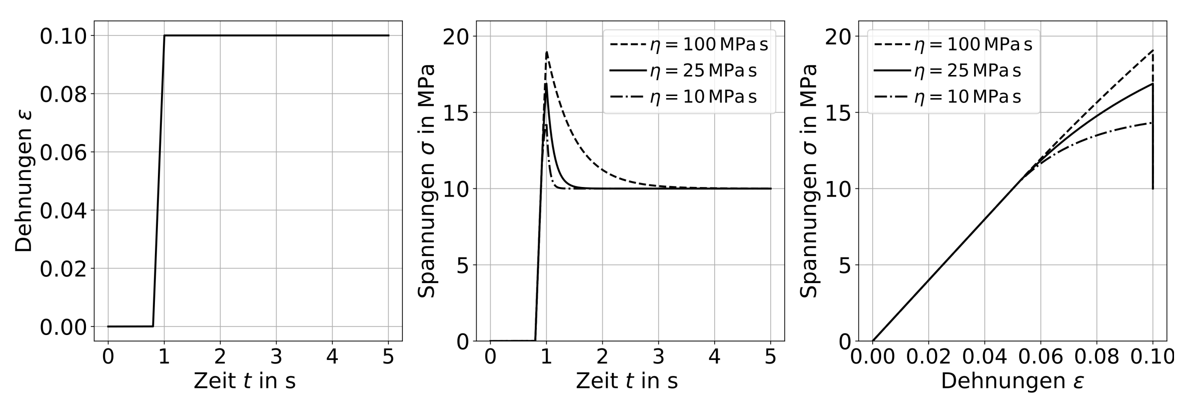
Für ein **viskoelastisches** Material und den in der folgenden Abbildung links vorgegebenen Dehnungsverlauf ergeben sich die in der mittleren Abbildung dargestellten zeitlichen Verläufe der Spannungen. Ergänzen Sie das rechte Spannungs-Dehnungs-Diagramm um die Spannungs-Dehnungs-Verläufe für die Viskositätsparameterwerte $\eta = 10\,\mathrm{MPa\,s}$ und $\eta = 100\,\mathrm{MPa\,s}$. **(1,0 Punkte)**



Nennen Sie die Bezeichnung eines geeigneten rheologischen Modells für dieses Materialverhalten. **(0,5 Punkte)**

linearer Standardkörper

Für ein **elasto-viskoplastisches** Material und den in der folgenden Abbildung links vorgegebenen Dehnungsverlauf ergeben sich die in der mittleren Abbildung dargestellten zeitlichen Verläufe der Spannungen. Ergänzen Sie das rechte Spannungs-Dehnungs-Diagramm um die Spannungs-Dehnungs-Verläufe für die Viskositätsparameterwerte $\eta = 10\,\mathrm{MPa\,s}$ und $\eta = 100\,\mathrm{MPa\,s}$. **(1,0 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

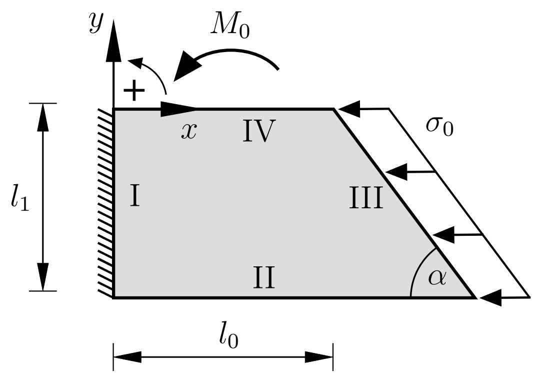
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

Die nebenstehend abgebildete Scheibe der Dicke t ist auf der linken Seite eingespannt und wird wie dargestellt durch ein äußeres Moment M_0 sowie eine konstante äußere Spannung σ_0 belastet. Gehen Sie von einem ebenen Spannungszustand aus.



a)

Bestimmen Sie sämtliche Spannungsrandbedingungen (ggf. auch in integraler Form) an den Rändern II, III und IV bzgl. des vorgegebenen (x, y)-Koordinatensystems. **(3,5 Punkte)**

<u>Rand II:</u> $0 \le x \le l_0 + \frac{l_1}{\tan(\alpha)}, \quad y = -l_1$

$\sigma_{xy}(x, y = -l_1) = 0$

$\sigma_{yy}(x, y = -l_1) = 0$

<u>Rand III:</u> $l_0 \le x \le l_0 + \frac{l_1}{\tan(\alpha)}, \quad y = [l_0 - x]\,\tan(\alpha)$

$\sigma_{xx}\,\sin(\alpha) + \sigma_{xy}\,\cos(\alpha) = -\sigma_0$

$\sigma_{yx}\,\sin(\alpha) + \sigma_{yy}\,\cos(\alpha) = 0$

<u>Rand IV:</u> $0 \le x \le l_0, \quad y = 0$

$\sigma_{xy}(x, y = 0) = 0$

$-\int_0^{l_0} \sigma_{yy}(x, y = 0)\, x\, t\, \mathrm{d}x + M_0 = 0$

$\int_0^{l_0} \sigma_{yy}(x, y = 0)\, t\, \mathrm{d}x = 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

b)

Zur Beschreibung der Spannungen im obigen System soll die Airy'sche Spannungsfunktion

$$F(x,\ y) = c_1\, x^3 + c_2\, x^2\, y + c_3\, [x^5 - 5\, x^3\, y^2]$$

untersucht werden, wobei $c_i = \text{konst.}$ (mit $i \in \{1, 2, 3\}$) gelte.

Geben Sie die resultierenden Spannungsfunktionen σ_{xx}, σ_{xy} und σ_{yy} an. **(2,0 Punkte)**
Hinweis: Die Konstanten sollen hier nicht bestimmt werden!

$\sigma_{xx} = -10\, c_3\, x^3$

$\sigma_{xy} = -\, [2\, c_2\, x - 30\, c_3\, x^2\, y]$

$\sigma_{yy} = 6\, c_1\, x + 2c_2\, y + c_3\, [20\, x^3 - 30\, x\, y^2]$

Geben Sie den Vektor der Volumenkräfte $\boldsymbol{f}_{\text{vol}}$ an, für den sich das System in jedem Punkt im Gleichgewicht befindet. Trägheitsterme sind zu vernachlässigen. Notieren Sie wichtige Zwischenschritte und/oder begründen Sie ihre Antwort kurz. **(1,0 Punkte)**

$\boldsymbol{f}_{\text{vol}} = \mathbf{0}$, weil $\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ a priori erfüllt ist, da $\boldsymbol{\sigma}$ aus F (Airy'sche Spannungsfunktion) berechnet wurde.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Für lineare isotrope Elastizität kann ein Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ aus dem zuvor bestimmten Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ bestimmt werden. Geben Sie an, ob dazu vereinfachend die Formeln des Ebenen Spannungszustandes (ESZ) oder des Ebenen Verzerrungszustandes (EVZ) verwendet werden können (und wenn ja, welche?), oder ob die Formeln für den 3D-Fall benutzt werden müssen. Begründen Sie Ihre Antwort kurz. **(1,0 Punkte)**
Hinweis: Die Formeln müssen hier nicht aufgeführt werden und auch der Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ soll hier nicht berechnet werden!

ESZ-Formeln, weil Airy'sche Spannungsfunktionen per Definition nur ebene Spannungszustände betrachten.

c)

An einem weiteren Bauteil wurden mittels Digital Image Correlation (DIC), einem kamerabasierten Messsystem, die Verschiebungen der Oberflächenpunkte erfasst. Auf Basis dieser Messdaten wurden für das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u} = u_x\,\boldsymbol{e}_x + u_y\,\boldsymbol{e}_y + u_z\,\boldsymbol{e}_z$ die Beiträge in der x, y-Ebene

$$u_x(x,y) = k_1\,x + \frac{1}{3}\,k_3\,x^3, \qquad u_y(x,y) = k_2\,y - k_3\,x^2\,y$$

ermittelt, wobei $k_i = \text{konst.}$ (mit $i \in \{1,2,3\}$) gilt.

Bestimmen Sie die daraus resultierenden Koeffizienten ε_{xx}, ε_{xy}, ε_{yx} und ε_{yy} des Dehnungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$. **(1,0 Punkte)**

$$\varepsilon_{xx} = k_1 + k_3\,x^2$$

$$\varepsilon_{xy} = -k_3\,x\,y$$

$$\varepsilon_{yx} = \varepsilon_{xy}$$

$$\varepsilon_{yy} = k_2 - k_3\,x^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

Zusätzlich zu den mittels Digital Image Correlation (DIC) in der x, y-Ebene erfassten Verschiebungen, wurde auch eine Dehnung in Dickenrichtung (z-Richtung) des Bauteils beobachtet. Diese Dehnung ist technisch bedingt mit dem DIC-System jedoch nicht messbar.

Berechnen Sie den Koeffizienten ε_{zz} des Dehnungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ unter der Annahme eines ebenen Spannungszustands (ESZ) und linearer isotroper Elastizität mit Querkontraktionszahl ν (und Elastizitätsmodul E). **(1,5 Punkte)**

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu}\,[k_1 + k_2]$$