

Aufgabe 1 (Seite 1 von 5)

a)

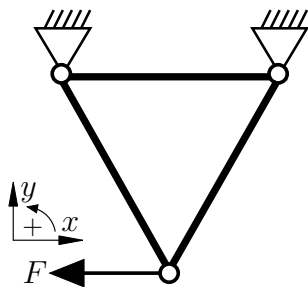
Nennen Sie zwei Gründe, warum viele technisch relevante Randwertprobleme nicht analytisch lösbar sind. **(0,5 Punkte)**

-Nichtlineare Probleme: Geometrie, Material -Keine analytische Lösung in closed Form -Kontaktprobleme

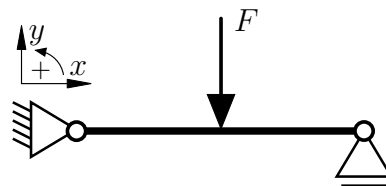
Nennen Sie mindestens zwei wesentliche konzeptionelle Teilschritte zur Herleitung der residualen Gleichung der Finiten-Elemente-Knotenkräfte. **(0,5 Punkte)**

-Starke Form zu schwacher Form -Diskretisierung: Ansatzfunktionen, Elemente, Freiheitsgrade -Numerische Integration -Assembly: Kraftvektoren und Steifigkeit -Lösen des Gleichungssystems

Geben Sie für die unten abgebildeten Systeme A und B an, ob sie sich mit der Finite-Elemente-Methode unter Verwendung eindimensionaler Stabelemente modellieren und lösen lassen. Begründen Sie Ihre Entscheidung in kurzen Worten. **(1,0 Punkte)**



System A



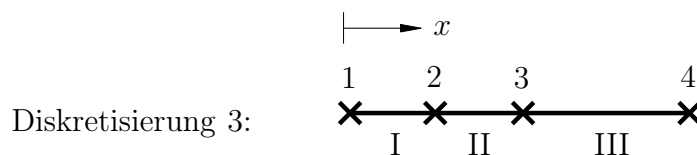
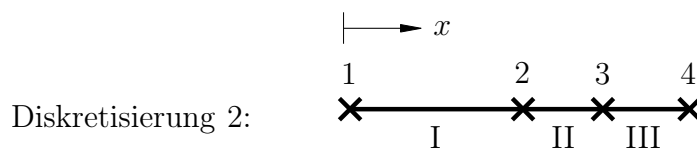
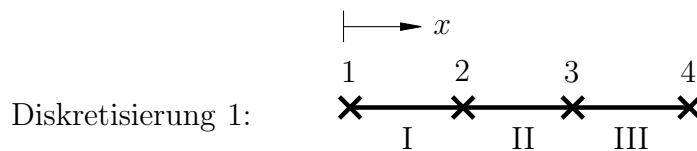
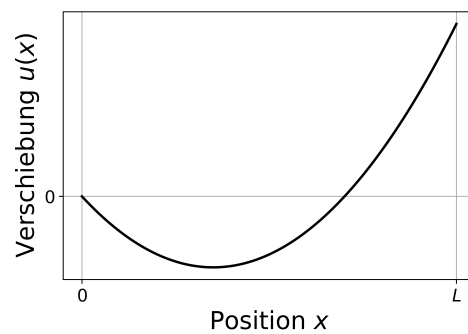
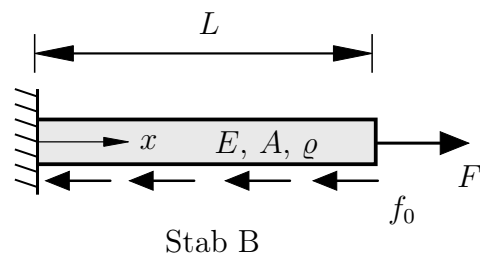
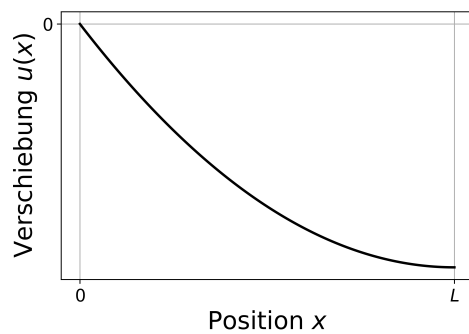
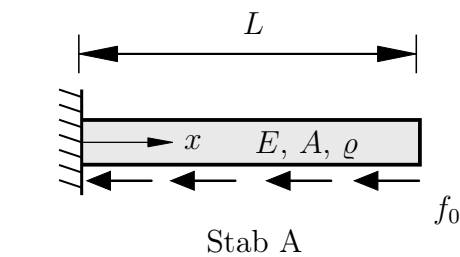
System B

System A: Lösbar. Obwohl gemäß der grundlegenden statischen Theorie überbestimmt, ist die FEM in der Lage, die Mechanik verformbarer Körper (Mechanics of deformable bodies) zu berücksichtigen.

System B: Nicht lösbar. Auf einen Knoten wirkt keine Kraft.

Aufgabe 1 (Seite 2 von 5)

Für die zwei unten dargestellten Stabsysteme ergeben sich die darunter dargestellten analytischen Verläufe der Verschiebungen. Die Verschiebungen sollen anhand der FEM unter Verwendung von drei Elementen und linearen Ansatzfunktion näherungsweise bestimmt werden. Identifizieren Sie, welche Diskretisierung für den jeweiligen Lastfall am geeignetsten ist. **(1,0 Punkte)**

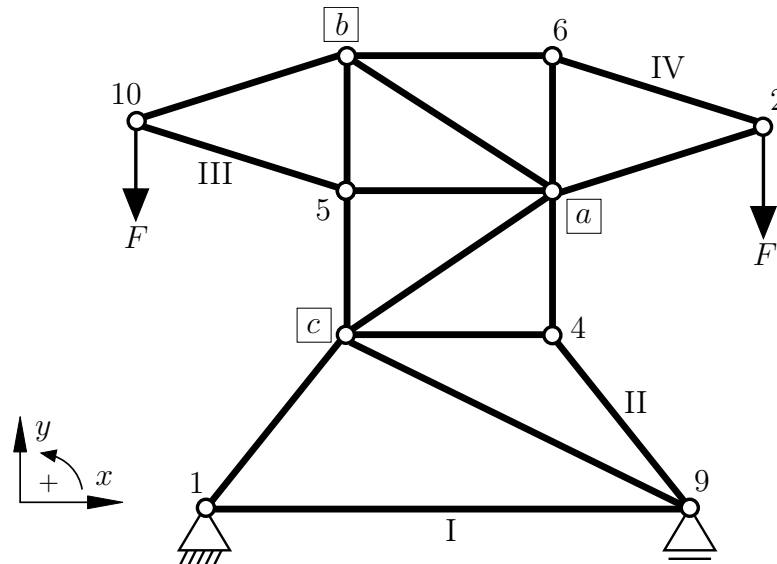


Stab A: Diskretisierung 2

Stab B: Diskretisierung 3

Aufgabe 1 (Seite 3 von 5)

b)



Elementnummer	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Globale Knotennummern	1,9	4,9	5,10	6,2	3,8	7,8	5,3	5,8	7,5

Elementnummer	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII
Globale Knotennummern	8,6	6,3	7,1	4,8	7,9	2,8	4,7	3,10

Betrachten Sie die oben angegebene Konnektivitätsliste. Ordnen Sie den fehlenden Knoten a , b , c ihre entsprechende Finite-Elemente-Knotennummer aus der Konnektivitätsliste zu.

(1,0 Punkte)

$a = 8$

$b = 3$

$c = 7$

Die Liste aller globalen Freiheitsgrade sei wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, \dots]^t$. Bestimmen Sie die Liste **dr1tDoFs**, welche die globalen Freiheitsgradnummern der Dirichlet-Freiheitsgrade beinhaltet. Geben Sie die zu den globalen Freiheitsgradnummern der Neumann-Freiheitsgrade korrespondierenden Kräfte $\mathbf{f}_{\text{pre}} (= \mathbf{f}_{\text{sur } F})$ an.

Hinweis: Beachten Sie das vorgegebene Koordinatensystem.

(1,0 Punkte)

$$\text{dr1tDoFs} = [1, 2, 18]^t$$

$$\mathbf{f}_{\text{pre}} = \mathbf{f}_{\text{sur } F} = [0, -F, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -F]^t$$

Aufgabe 1 (Seite 4 von 5)

Geben Sie für das oben abgebildete Fachwerk die Dimensionen der globalen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ sowie die Dimensionen der Element-Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}^e$ an. **(1,0 Punkte)**

Dimensionen der globalen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$: [20 X 20]

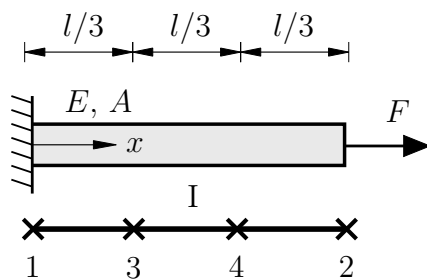
Dimensionen einer Element-Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}^e$: [4 X 4]

c)

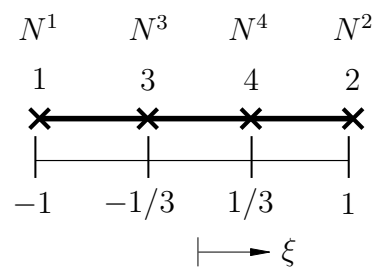
Im Rahmen der auf den Stab angewandten FEM werden zur Bestimmung der diskreten Knoten-Verschiebungen $\mathbf{u}$ die Element-Knoten-Steifigkeitsbeiträge K^{eAB} anhand der folgenden Gleichung auf dem Master-Element näherungsweise berechnet.

$$K^{eAB} \approx \sum_{p=1}^{n_{qp}} N_{,\xi}^A(\xi_p) [J^e(\xi_p)]^{-1} EA N_{,\xi}^B(\xi_p) [J^e(\xi_p)]^{-1} J^e(\xi_p) w_p.$$

Die oben dargestellte Gleichung soll nun auf den unten abgebildeten Stab angewandt werden. Der Stab wird mit einem Element (I) und vier Knoten pro Element (1, 2, 3, 4) diskretisiert.



Physikalisches Element



Master-Element

Die auf dem dargestellten Master-Element definierten kubischen Ansatzfunktionen (Lagrange-Polynome) $N^A(\xi)$ sind durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$N^A(\xi) = \prod_{\substack{J=1 \\ J \neq A}}^{n_{en}=4} \frac{\xi_J - \xi}{\xi_J - \xi_A} \quad \text{mit} \quad \xi \in [-1, +1], \quad \text{sodass} \quad N^A(\xi_H) = \delta_{AH}.$$

Die Ansatzfunktionen $N^1(\xi)$, $N^2(\xi)$ sowie deren Ableitungen $N_{,\xi}^1(\xi)$ und $N_{,\xi}^2(\xi)$ wurden bereits bestimmt zu:

Aufgabe 1 (Seite 5 von 5)

$$N^1(\xi) = -\frac{[1 - 9\xi^2][1 - \xi]}{16},$$

$$N_{,\xi}^1(\xi) = \frac{1 + 18\xi - 27\xi^2}{16},$$

$$N^2(\xi) = -\frac{[1 - 9\xi^2][1 + \xi]}{16},$$

$$N_{,\xi}^2(\xi) = \frac{-1 + 18\xi + 27\xi^2}{16}.$$

Bestimmen Sie die Ansatzfunktionen $N^3(\xi)$ und $N^4(\xi)$. **Hinweis:** Beachten Sie die vorgegebenen Master-Element-Knoten. Es gilt die Beziehung $N^1(\xi) = N^2(-\xi)$. **(2,0 Punkte)**

$$N^3(\xi) = \frac{9(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)}{16}$$

$$N^4(\xi) = \frac{9(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)}{16}$$

Werten Sie die Ableitungen der Ansatzfunktionen $N_{,\xi}^3(\xi)$ und $N_{,\xi}^4(\xi)$, die für die Element-Knoten-Steifigkeitsbeiträge K^{eAB} benötigt werden, auf dem Master-Element am Punkt $\xi = 0$ aus. **(1,0 Punkte)**

$$N_{,\xi}^3(\xi = 0) = -\frac{27}{16}$$

$$N_{,\xi}^4(\xi = 0) = \frac{27}{16}$$

Werten Sie die Jacobi-'Determinante' $J^e(\xi)$, die für die Element-Knoten-Steifigkeitsbeiträge K^{eAB} benötigt wird, auf dem Master-Element am Punkt $\xi = 0$ aus. **(1,0 Punkte)**

$$J^e(\xi = 0) = \frac{l}{2}$$

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)

Nennen Sie mindestens zwei wesentliche Unterschiede zwischen elastischem und inelastischem Materialverhalten. Wie lässt sich inelastisches Verhalten experimentell erkennen?

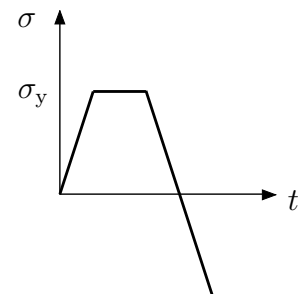
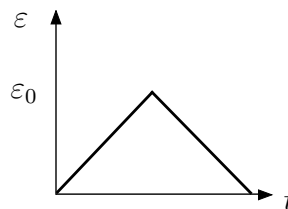
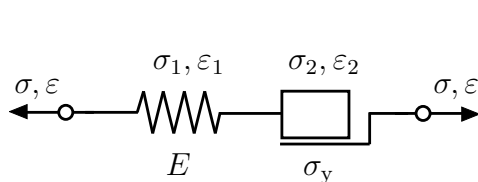
(1,0 Punkte)

- Die Spannungs-Dehnungskurve ist Lastpfad abhängig
- Die Spannungs-Dehnungskurve weist eine Hysterese auf
- Inelastisches Materialverhalten lässt sich im Experiment durch eine Wärmeentwicklung identifizieren

Nennen Sie mindestens zwei Arten von inelastischem Materialverhalten. Geben Sie jeweils einen typischen Werkstoff an, bei dem dieses Materialverhalten auftritt. **(1,0 Punkte)**

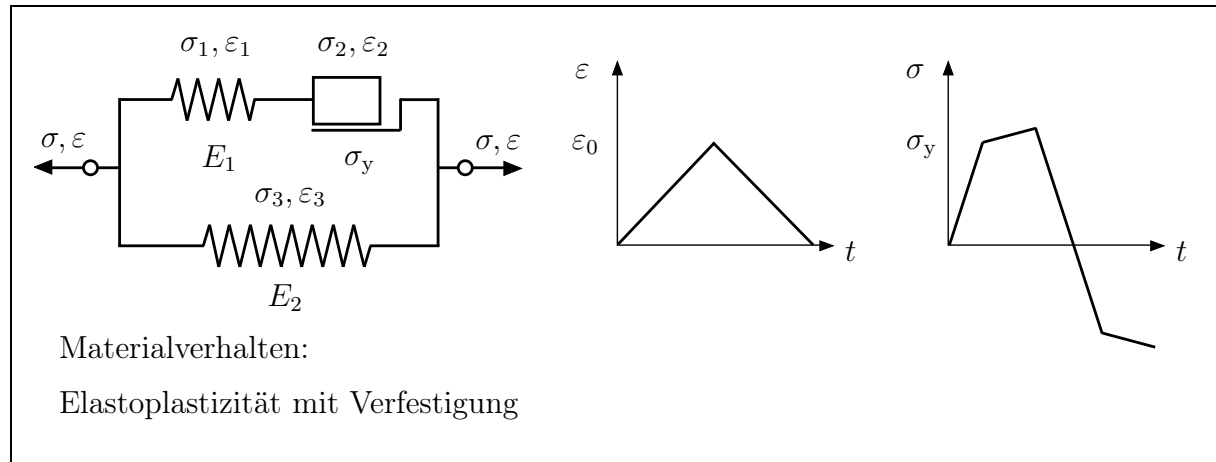
- Zeitabhängiges Materialverhalten
→ z.B. Stahl bei erhöhten Temperaturen
- Plastisches Materialverhalten
→ z.B. Stahl bei Raumtemperatur

Die in den folgenden Abbildungen **rechts** dargestellten Materialantworten ergeben sich durch die jeweils in den **mittleren** Abbildungen gezeigten Lastverläufe. Skizzieren Sie in der jeweiligen **linken** Abbildung ein geeignetes rheologisches Modell, das dieses Materialverhalten abbildet und auf den (linearen) rheologischen Grundkörpern basiert. Benennen Sie außerdem das dargestellte Materialverhalten. **(2,0 Punkte)**



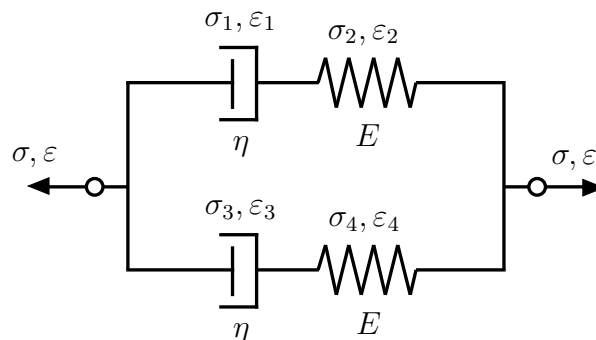
Materialverhalten:

Elastoplastizität ohne Verfestigung

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

b)

Im Folgenden wird das unten dargestellte rheologische Modell bestehend aus dem Elastizitätsmodul E und der Dämpfungskonstanten η betrachtet. Die den jeweiligen Teilkörpern zugehörigen Spannungen $\sigma_\bullet$ und Dehnungen $\varepsilon_\bullet$ mit $\bullet = \{1, 2, 3, 4\}$ sind der Skizze zu entnehmen und als **unbekannt** anzunehmen.



Leiten Sie eine Differentialgleichung her, die es erlaubt, die Spannung $\sigma(t)$ aus einem gegebenen Dehnungsverlauf $\varepsilon(t)$ zu berechnen. **(2,0 Punkte)**

Gesamtspannung

$$\sigma = \sigma_{12} + \sigma_{34}$$

Gesamtdehnung

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{12} = \dot{\varepsilon}_{34}$$

Bestimmung des Stoffgesetzes

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} \sigma_{12} + \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{12} \quad (1) \quad \xrightarrow{(1)+(2)}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} \sigma_{34} + \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{34} \quad (2) \quad \rightarrow$$

Maxwell-Körper

$$\dot{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{\eta} \sigma_{12} + \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{12}$$

$$\dot{\varepsilon}_{34} = \frac{1}{\eta} \sigma_{34} + \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{34}$$

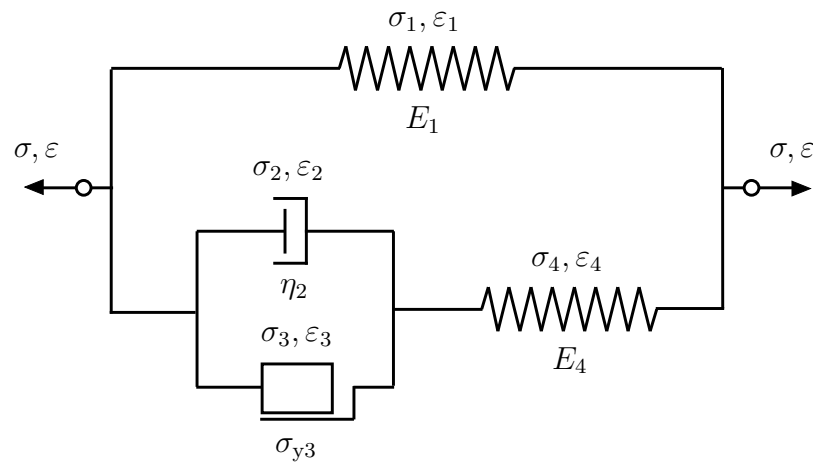
$$2 \dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} \sigma_{12} + \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{12} + \frac{1}{\eta} \sigma_{34} + \frac{1}{E} \dot{\sigma}_{34}$$

$$2 \dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} [\sigma_{12} + \sigma_{34}] + \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{12} + \dot{\sigma}_{34}] = \frac{1}{\eta} \sigma + \frac{1}{E} \dot{\sigma}$$

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

c)

Im Folgenden wird das unten dargestellte rheologische Modell bestehend aus den Elastizitätsmoduli E_1 , E_4 , der Dämpfungskonstanten η_2 und der plastischen Fließgrenze σ_{y3} betrachtet. Die den jeweiligen Teilkörpern zugehörigen Spannungen $\sigma_\bullet$ und Dehnungen $\varepsilon_\bullet$ mit $\bullet = \{1, 2, 3, 4\}$ sind der Skizze zu entnehmen und als **unbekannt** anzunehmen. Im Ausgangszustand sind alle Dehnungen $\varepsilon_\bullet$ identisch Null. Gehen Sie von einer monoton steigenden Belastung mit $\dot{\varepsilon} > 0$ aus.



Leiten Sie eine Differentialgleichung her, die es erlaubt, die Spannung $\sigma(t)$ aus einem gegebenen Dehnungsverlauf $\varepsilon(t)$ im Fall $\sigma_3 = \sigma_{y3}$ zu berechnen. **Hinweis:** Führen Sie zur Lösung des Gesamtmodells ein geeignetes Ersatzmodell mit Teilkörpern ein. **(2,0 Punkte)**

Gesamtspannung

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_{234}$$

Gesamtdehnung

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_{234}$$

Bingham-Hooke-Körper für $\sigma_3 = \sigma_{y3}$

$$\sigma_{234} + \frac{\eta_2}{E_4} \dot{\sigma}_{234} = \eta_2 \dot{\varepsilon}_{234} + \sigma_{y3}$$

Hooke-Element

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1$$

Bestimmung des Stoffgesetzes für $\sigma_3 = \sigma_{y3}$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_{234} = E_1 \varepsilon_1 + \eta_2 \dot{\varepsilon}_{234} + \sigma_{y3} - \frac{\eta_2}{E_4} \dot{\sigma}_{234}$$

$$= E_1 \varepsilon + \eta_2 \dot{\varepsilon} + \sigma_{y3} - \frac{\eta_2}{E_4} [\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_1]$$

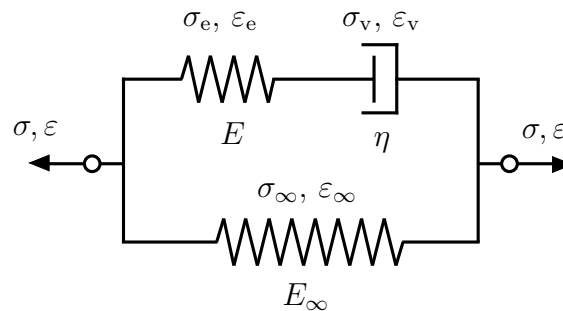
$$\text{mit } \dot{\sigma}_1 = E_1 \dot{\varepsilon}_1 = E_1 \dot{\varepsilon}$$

$$\rightarrow \sigma + \frac{\eta_2}{E_4} \dot{\sigma} = E_1 \varepsilon + \left[\frac{E_4 + E_1}{E_4} \right] \eta_2 \dot{\varepsilon} + \sigma_{y3}$$

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

d)

In einer Programmierübung wurde das Verhalten des unten dargestellten linearen Standardkörpers anhand eines numerischen Lösungsansatzes untersucht.



Zur Bestimmung der viskosen Dehnung ε_{vn+1} und der Spannung σ_{n+1} im aktuellen Zeitschritt $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ wurden die Funktionen **stress()** und **res()** unter Verwendung einer impliziten Euler rückwärts Zeitintegration der Evolutionsgleichung implementiert.

Die Update-Formel für die Spannung σ_{n+1} und die Evolutionsgleichung der viskosen Dehnung $\dot{\varepsilon}_{vn+1}$ ergeben sich für eine als bekannt vorausgesetzte Dehnung ε_{n+1} zu

$$\sigma_{n+1}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{vn+1}) = E [\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{vn+1}] + E_{\infty} \varepsilon_{n+1}, \quad \dot{\varepsilon}_{vn+1} = \frac{E}{\eta} [\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{vn+1}].$$

Vervollständigen Sie den unten dargestellten Python Programmcode. **(2,0 Punkte)**

```
def stress(eps, epsvn, dt, Einf, E, eta):
    # Berechnung der Relaxationszeit tau
    tau = eta / E

    # Update der viskosen Dehnung (impliziter Euler rückwärts)
    epsv = (1 + dt / tau) ** (-1) * (epsvn + dt / tau * eps)

    # Update der Spannung aus den Dehnungen
    sig = E * (eps - epsv) + Einf * eps

    return sig, epsv

def res(eps, sig, epsv, epsvn, dt, Einf, E, eta):
    # Residuum der Spannungs-Dehnungs-Beziehung
    r1 = sig - E * (eps - epsv) - Einf * eps

    # Residuum der Fließregel (Evolutionsgleichung)
    r2 = (epsv - epsvn) / dt - E / eta * (eps - epsv)

    return np.array([r1, r2])
```

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

a)

Die durch ein Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ für eine Starrkörperbewegung erzeugte neue Position $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ für jeden Punkt $\mathbf{X}$ eines Körpers ist in Abhängigkeit der Zeit t durch die folgende Funktion gegeben:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{c}(t) ,$$

wobei die Koeffizienten der Rotationsmatrix

$$[\mathbf{R}]_{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) \end{bmatrix}$$

sowie der Vektor $\mathbf{c}(t)$ unabhängig von $\mathbf{X}$ sind.

Bestimmen Sie das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$.

(0,5 Punkte)

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = [\mathbf{R}(t) - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{X} + \mathbf{c}(t)$$

Bestimmen Sie den infinitesimalen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ für den Winkel $\alpha(t) = \pi/2$.
(1,0 Punkte)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha(t) = \pi/2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

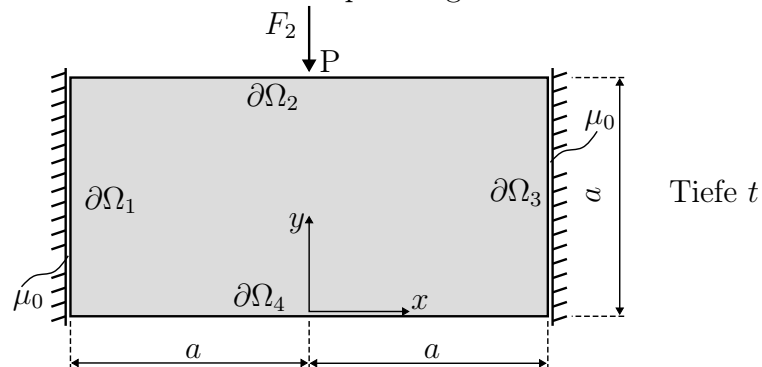
Ist das Ergebnis für $\boldsymbol{\varepsilon}(\alpha(t) = \pi/2)$ ein sinnvoller Verzerrungszustand für die betrachtete Starrkörperbewegung? Begründen Sie Ihre Antwort.
(1,0 Punkte)

Nein, da trotz einer reinen Starrkörperbewegung eine Verzerrung auftritt. Das Verzerrungsmaß ist daher für diese Anwendung ungeeignet.

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

b)

Die dargestellte elastische Platte ist durch eine Vorspannung zwischen den starren seitlichen Begrenzungen eingeklemmt und wird im Punkt P durch die Kraft F_2 belastet. Gehen Sie im Folgenden von einem ebenen Spannungszustand aus.



Im Folgenden soll die Airy'sche Spannungsfunktion

$$F(x, y) = \frac{C_1}{a} x^2 y + \frac{C_2}{a^3} x^4 y + C_3 y^2$$

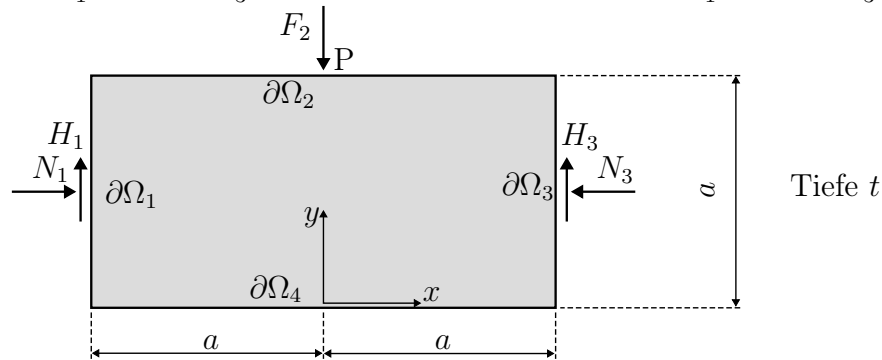
verwendet werden, um das Problem näherungsweise zu berechnen. Bestimmen Sie die Koeffizienten des zugehörigen Spannungstensors. Die Konstanten C_1 , C_2 und C_3 müssen **nicht** bestimmt werden. (1,5 Punkte)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2 C_3 \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2 \frac{C_1}{a} y + 12 \frac{C_2}{a^3} x^2 y \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2 \frac{C_1}{a} x - 4 \frac{C_2}{a^3} x^3\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

c)

Die Lagerung an den Seiten wurde im dargestellten Freikörperbild durch die Haftkräfte H_1 und H_3 sowie die Normalkräfte N_1 und N_3 ersetzt.



Geben Sie die Spannungs-Randbedingungen für die Ränder $\partial\Omega_1$ und $\partial\Omega_2$ in Abhängigkeit der Koeffizienten σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{xy} des Spannungstensors an. **(3,0 Punkte)**

$$t \int_0^a -\sigma_{xx}(x = -a) \, dy = N_1$$

$$t \int_0^a -\sigma_{xy}(x = -a) \, dy = H_1$$

$$t \int_{-a}^a -\sigma_{xy}(y = a) \, dx = 0$$

$$t \int_{-a}^a -\sigma_{yy}(y = a) \, dx = F_2$$

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

Verwenden Sie im Folgenden die aus einer anderen Spannungsfunktion resultierenden Koeffizienten des Spannungstensors

$$\sigma_{xx} = -2 \sigma_0 \ , \quad \sigma_{yy} = 12 \frac{D_1}{a^3} x^2 y \ , \quad \sigma_{xy} = -4 \frac{D_1}{a^3} x^3 \ ,$$

wobei σ_0 eine bekannte Konstante darstellt.

Bestimmen Sie die Konstante D_1 aus der Randbedingung für die Normalspannung am Rand $\partial\Omega_2$. **(1,5 Punkte)**

$$D_1 = -\frac{F_2}{8 a t}$$

Geben Sie eine Bedingung für den Haftreibungskoeffizienten μ_0 in Abhängigkeit von F_2 und σ_0 an, sodass das System sich im statischen Gleichgewicht befindet. Nutzen Sie dazu die Randbedingung am Rand $\partial\Omega_1$. **Hinweis:** Aus dem statischen Gleichgewicht des Systems ergibt sich $H_1 = H_3 = F_2/2$. **(1,5 Punkte)**

$$F_2 \leq 4 \mu_0 \sigma_0 a t$$