

Aufgabe 1 (Seite 1 von 6)

a)

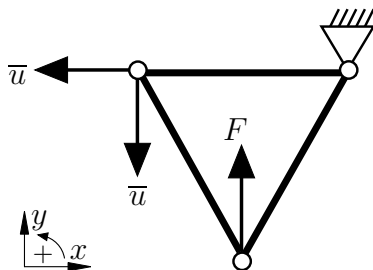
Nennen Sie mindestens zwei Schritte, um die starke (lokale) Form der Impulsbilanz in die schwache Form umzuwandeln. **(0,5 Punkte)**

- Multiplikation mit virtuellen Verschiebungen δu (oder Testfunktion)
- Partielle Integration

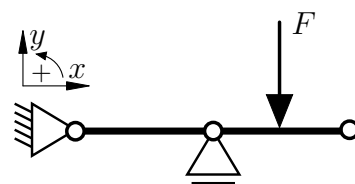
Nennen Sie mindestens zwei der erforderlichen Felder, die bei der Formulierung der Finite-Elemente-Methode diskretisiert werden müssen. **(0,5 Punkte)**

- virtuellen Verschiebungen δu (oder Testfunktion)
- Verschiebungen u
- Gesamtgebietes $\mathcal{B}$

Geben Sie für die unten abgebildeten Systeme A und B an, ob sie sich mit der Finite-Elemente-Methode unter Verwendung eindimensionaler Stabelemente modellieren und lösen lassen. Begründen Sie kurz. **(1,0 Punkte)**



System A



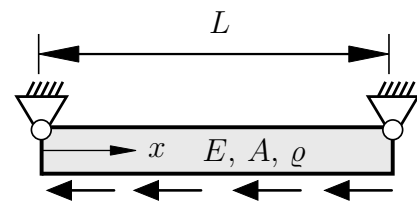
System B

System A: Lösbar. Obwohl gemäß der grundlegenden statischen Theorie überbestimmt, ist die FEM in der Lage, die Mechanik verformbarer Körper (Mechanics of deformable bodies) zu berücksichtigen.

System B: Nicht lösbar. Auf einen Knoten wirkt keine Kraft.

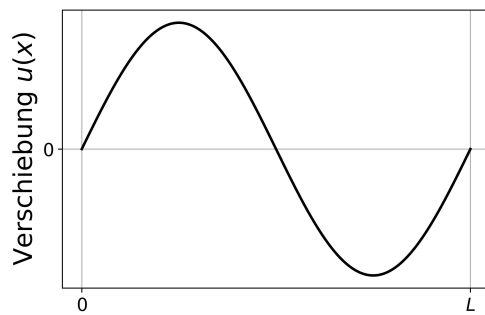
Aufgabe 1 (Seite 2 von 6)

Für die zwei unten dargestellten Stabsysteme ergeben sich die darunter dargestellten analytischen Verläufe der Verschiebungen. Die Verschiebungen sollen anhand der FEM unter Verwendung von fünf Elementen und linearen Ansatzfunktion näherungsweise bestimmt werden. Identifizieren Sie, welche Diskretisierung für den jeweiligen Lastfall am geeignetsten ist. **(1,0 Punkte)**

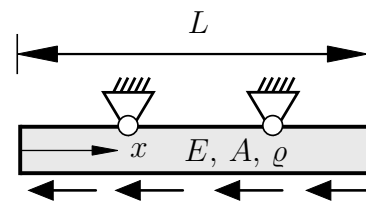


$$f(x) = \frac{4\pi^2 E A}{L^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Stab A

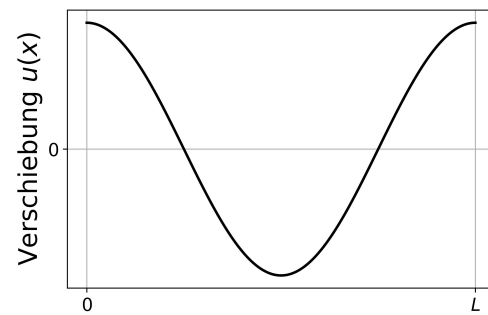


Position x



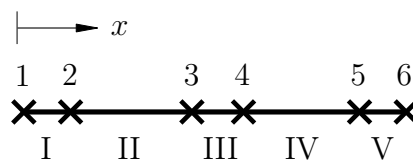
$$f(x) = \frac{4\pi^2 E A}{L^2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Stab B

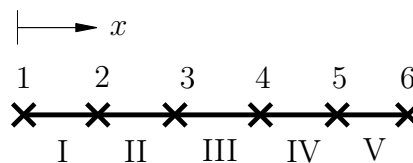


Position x

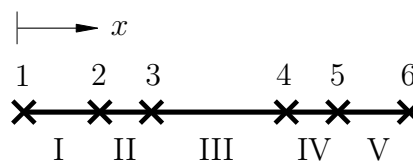
Diskretisierung 1:



Diskretisierung 2:



Diskretisierung 3:

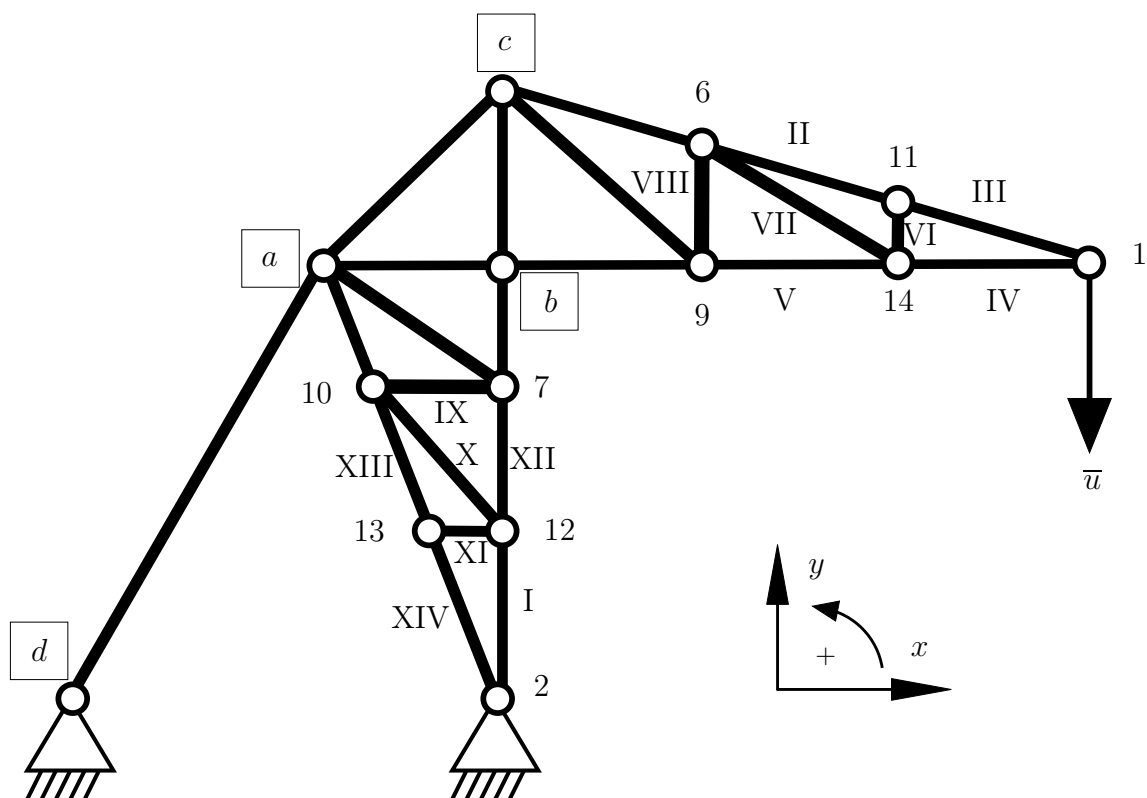


Stab A: Diskretisierung 3

Stab B: Diskretisierung 1

Aufgabe 1 (Seite 3 von 6)

b)



Elementnummer	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Globale Knotennummern	2,12	6,11	11,1	1,14	14,9	11,14	6,14	6,9	10,7

Elementnummer	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII
Globale Knotennummern	10,12	13,12	7,12	10,13	13,2	8,3	3,4	4,8

Elementnummer	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII	XXIV
Globale Knotennummern	8,5	3,6	3,9	4,9	8,7	8,10	4,7

Betrachten Sie die oben angegebene Konnektivitätsliste. Ordnen Sie den fehlenden Knoten a , b , c , d ihre entsprechende Finite-Elemente-Knotennummer aus der Konnektivitätsliste zu. **(1,5 Punkte)**

$a = 8$

$b = 4$

$c = 3$

$d = 5$

Aufgabe 1 (Seite 4 von 6)

Die Liste aller globalen Freiheitsgrade des oben abgebildeten Fachwerks sei wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, \dots]^t$. Bestimmen Sie die Liste **dr1tDoFs**, welche die globalen Freiheitsgradnummern der Dirichlet-Freiheitsgrade beinhaltet. Geben Sie die dazu korrespondierende Liste der Verschiebungen $\mathbf{u}_D$ an.

Hinweis: Beachten Sie das vorgegebene Koordinatensystem.

(1,0 Punkte)

$$\text{dr1tDoFs} = [2, 3, 4, 9, 10]^t$$

$$\mathbf{u}_D = [\bar{u}, 0, 0, 0, 0]^t$$

Geben Sie die Dimensionen der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{FD}$ und die Dimensionen des globalen Verschiebungsvektors $\mathbf{u}$ an.

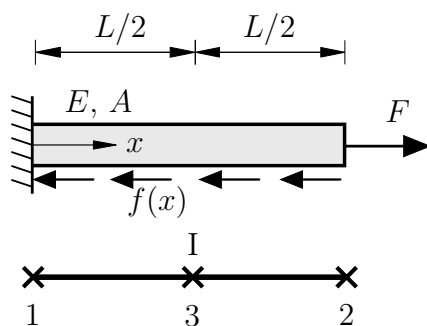
(1,0 Punkte)

Dimensionen der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{FD}$: $[23 \quad X \quad 5]$

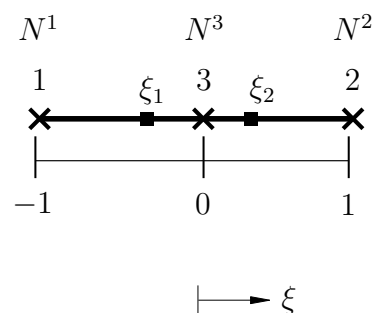
Dimensionen des globalen Verschiebungsvektors $\mathbf{u}$: $[28 \quad X \quad 1]$

c)

Der unten abgebildete Stab (E, A) soll nun betrachtet werden. Der Stab wird mit einem Element (I) und drei Knoten pro Element (1, 2, 3) diskretisiert.



Physikalisches Element



Master-Element

Der Stab sei auf der rechten Seite über die Kraft F belastet und erfährt zusätzlich die Volumenkraft

$$f(x) = \frac{4\pi^2 E A}{L^2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right).$$

Aufgabe 1 (Seite 5 von 6)

Die auf dem dargestellten Master-Element definierten quadratischen Ansatzfunktionen (Lagrange-Polynome) $N^A(\xi)$ sind durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$N^A(\xi) = \prod_{\substack{J=1 \\ J \neq A}}^{n_{\text{en}}=3} \frac{\xi_J - \xi}{\xi_J - \xi_A} \quad \text{mit} \quad \xi \in [-1, +1], \quad \text{sodass} \quad N^A(\xi_H) = \delta_{AH}.$$

Werten Sie die Koordinatentransformation $x_I^h(\xi)$ von dem Masterelement auf das physikalische Element für das oben abgebildete System an den Gauß-Punkten ξ_1 und ξ_2 aus.
(1,0 Punkte)

$$x_I^h(\xi = \frac{-1}{\sqrt{3}}) = \frac{L}{2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$x_I^h(\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{L}{2} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

Werten Sie die Jacobi-Determinante $J^e(\xi)$ auf dem Master-Element an den Gauß-Punkten ξ_1 und ξ_2 aus.
(1,0 Punkte)

$$J^e(\xi = \frac{-1}{\sqrt{3}}) = \frac{L}{2}$$

$$J^e(\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{L}{2}$$

Aufgabe 1 (Seite 6 von 6)

Im Rahmen der auf den Stab angewandten FEM kann das Integral der Volumenkraft $f(x)$ über den Stab mittels des Konzepts des Masterelements und der numerischen Integration nach Gauß wie folgt approximiert werden

$$\int_{\mathcal{B}} f(x) \, dx \approx \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}=1} \int_{\mathcal{B}_e} f(x) \, dx \approx \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}=1} \sum_{p=1}^{n_{\text{qp}}=2} f(x(\xi_p)) J^e(\xi_p) w_p.$$

Bestimmen Sie unter Verwendung des Konzepts der numerischen Integration nach Gauß die Lösung des Integrals für die gegebene Volumenkraft $f(x)$. Die Terme dürfen nicht vereinfacht werden. **(1,5 Punkte)**

$$\int_0^L f(x) \, dx = 0$$

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

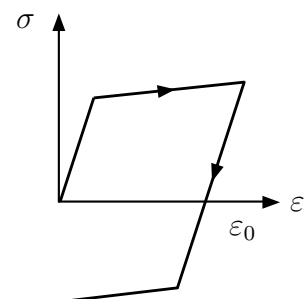
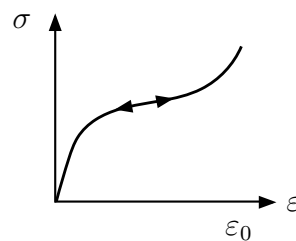
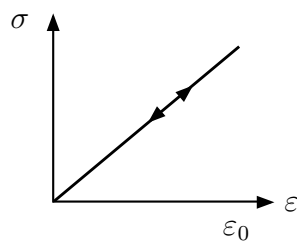
a)

Kreuzen Sie an, ob es sich bei den folgenden Aussagen um ein rein elastisches Materialverhalten handeln kann. **Hinweis:** Falsche oder fehlende Angaben führen zu Punktabzug. Minuspunkte sind aber nicht möglich. (1,5 Punkte)

- ☐ Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen ist nicht eindeutig.
- ☒ Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen ist nicht linear.
- ☒ Die von den Spannungen geleistete Arbeit ist pfadunabhängig.
- ☐ Die Spannung ist eine Funktion der Dehnung und der Dehnungsrate.
- ☒ Der Entlastungspfad folgt dem Belastungspfad.

Die nachfolgend abgebildeten Spannungs-Dehnungs-Verläufe ergeben sich durch einen vorgegebenen Dehnungsverlauf, welcher monoton bis zum Maximalwert ε_0 ansteigt und danach monoton fällt. Kreuzen Sie jeweils an, ob das dargestellte Materialverhalten elastisch oder inelastisch ist. (1,5 Punkte)

Spannungs-Dehnungs-Verläufe:



Materialverhalten:

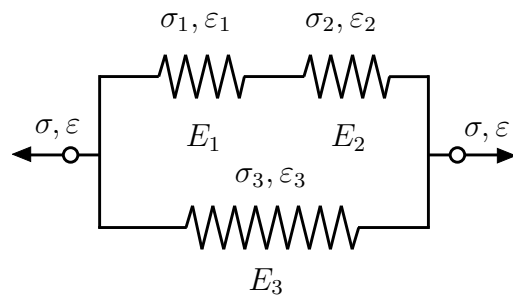
☒ elastisch☐ inelastisch☒ elastisch☐ inelastisch☐ elastisch☒ inelastisch

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

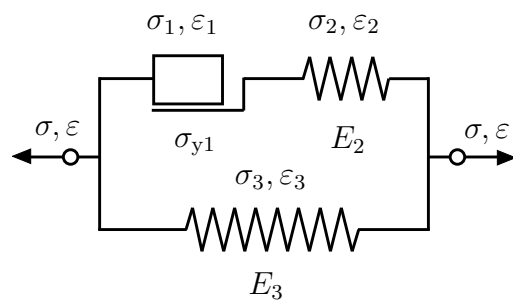
Benennen Sie für die nachfolgend abgebildeten rheologischen Modelle jeweils ein Materialverhalten, welches mithilfe dieser Modelle vorhergesagt werden kann. **(2,0 Punkte)**

Kombinationen von Grundmodellelementen:

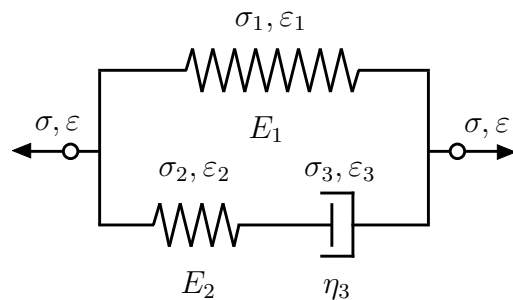
Materialverhalten:



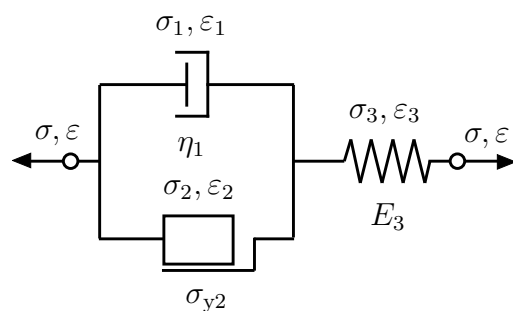
→ elastisches
Materialverhalten



→ elastoplastisches
Materialverhalten
mit Verfestigung



→ viskoelastisches
Materialverhalten

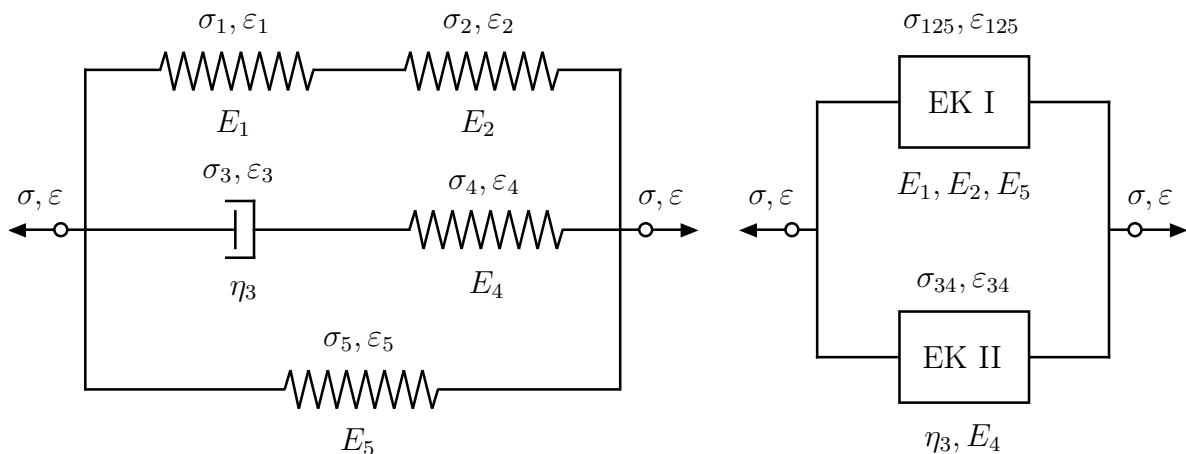


→ elasto-viskoplastisches
Materialverhalten

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

b)

Im Folgenden wird das links dargestellte rheologische Modell bestehend aus den Elastizitätsmoduli E_1, E_2, E_4, E_5 und der Dämpfungskonstanten η_3 betrachtet. Die den jeweiligen Teilkörpern zugehörigen Spannungen $\sigma_\bullet$ und Dehnungen $\varepsilon_\bullet$ mit $\bullet = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sind der Skizze zu entnehmen und als **unbekannt** anzunehmen.



Für das Gesamtmodell wurde das rechts dargestellte Ersatzmodell bestimmt. Die den jeweiligen Ersatzkörpern (EK I, EK II) zugehörigen Spannungen $\sigma_\bullet$ und Dehnungen $\varepsilon_\bullet$ mit $\bullet = \{125, 34\}$ sind der Skizze zu entnehmen und als **unbekannt** anzunehmen.

Geben Sie für den Ersatzkörper I eine Gleichung für den Ersatzelastizitätsmodul E_{125} als Funktion der Elastizitätsmoduli E_1, E_2, E_5 an, sodass $\sigma_{125} = E_{125} \varepsilon_{125}$ gilt. **(1,0 Punkte)**

$$E_{125}(E_1, E_2, E_5) = \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right]^{-1} + E_5$$

Leiten Sie für das Gesamtmodell eine Differentialgleichung her, die es erlaubt, die Spannung $\sigma(t)$ aus einem gegebenen Dehnungsverlauf $\varepsilon(t)$ zu berechnen. Der Ersatzelastizitätsmodul E_{125} sei bekannt. **(2,0 Punkte)**

Gesamtspannung

$$\sigma = \sigma_{125} + \sigma_{34}$$

Gesamtdehnung

$$\varepsilon = \varepsilon_{125} = \varepsilon_{34}$$

Maxwell-Körper

$$\dot{\varepsilon}_{34} = \frac{\sigma_{34}}{\eta_3} + \frac{\dot{\sigma}_{34}}{E_4}$$

Bestimmung des Stoffgesetzes

$$\sigma = E_{125} \varepsilon_{125} + \eta_3 \left[\dot{\varepsilon}_{34} - \frac{\dot{\sigma}_{34}}{E_4} \right]$$

$$\text{mit } \dot{\sigma}_{34} = \dot{\sigma} - \dot{\sigma}_{125} = \dot{\sigma} - E_{125} \dot{\varepsilon}_{125}$$

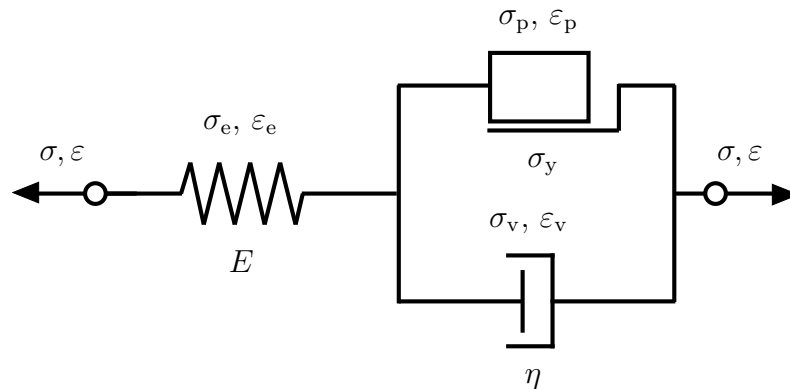
$$\text{und } \varepsilon_{125} = \varepsilon, \quad \dot{\varepsilon}_{34} = \dot{\varepsilon}, \quad \dot{\varepsilon}_{125} = \dot{\varepsilon}$$

$$\rightarrow \sigma + \frac{\eta_3}{E_4} \dot{\sigma} = E_{125} \varepsilon + \eta_3 \frac{E_{125} + E_4}{E_4} \dot{\varepsilon}$$

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

c)

In einer Programmierübung wurde das Verhalten des unten dargestellten Bingham-Hooke-Körpers anhand eines numerischen Lösungsansatzes untersucht.



Die Update-Formel für die Spannung σ_{n+1} und die Evolutionsgleichung der viskoplastischen Dehnung $\dot{\varepsilon}_{vp n+1}$ wurden für eine als bekannt vorausgesetzte Dehnung ε_{n+1} im aktuellen Zeitschritt $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ mit $\Delta t > 0$ wie folgt bestimmt:

$$\sigma_{n+1}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{vp n+1}) = E [\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{vp n+1}], \quad \dot{\varepsilon}_{vp n+1} = \frac{1}{\eta} \sigma_{vn+1}, \quad \sigma_{vn+1} = \sigma_{n+1} - \sigma_{pn+1}$$

Gehen Sie im Folgendem von aktivem viskoplastischem Fließen mit $\sigma_{pn+1} = \sigma_y$ aus.

Wenden Sie die implizite Euler-Rückwärts-Zeitintegration auf die Evolutionsgleichung der viskoplastischen Dehnung an ($\dot{\varepsilon}_{vp n+1}$) und geben Sie die daraus resultierende Update-Formel $\varepsilon_{vp n+1}(\sigma_{n+1})$ in Abhängigkeit der aktuellen Spannung σ_{n+1} an. **(1,0 Punkte)**

$$\varepsilon_{vp n+1}(\sigma_{n+1}) = \varepsilon_{vp n} + \frac{\Delta t}{\eta} [\sigma_{n+1} - \sigma_y]$$

Leiten Sie eine explizite Update-Formel für die viskoplastische Dehnung $\varepsilon_{vp n+1}$ in Abhängigkeit der aktuellen Dehnung ε_{n+1} her. **(1,0 Punkte)**

$$\varepsilon_{vp n+1}(\varepsilon_{n+1}) = \left[1 + \frac{\Delta t}{\eta} E \right]^{-1} \left[\varepsilon_{vp n} + \frac{\Delta t}{\eta} E \varepsilon_{n+1} - \frac{\Delta t}{\eta} \sigma_y \right]$$

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

a)

Geben Sie die drei wesentlichen Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie für den allgemeinen dreidimensionalen Fall an, welche den Zusammenhang zwischen

(i) Verschiebungen und Verzerrungen,

(ii) Verzerrungen und Spannungen,

(iii) Spannungen und äußeren Kräften

für einen materiellen Körper idealisiert als Kontinuumskörper herstellen. **(1,5 Punkte)**

$$(i) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right]^t \right]$$

$$(ii) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(iii) \quad \varrho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}$$

Nennen Sie einen Ansatz zur analytischen Lösung des oben definierten Randwertproblems der linearen Elastizitätstheorie. Geben Sie zudem an, unter welche Randbedingungen dieser genannte Ansatz besonders geeignet ist. **(1,5 Punkte)**

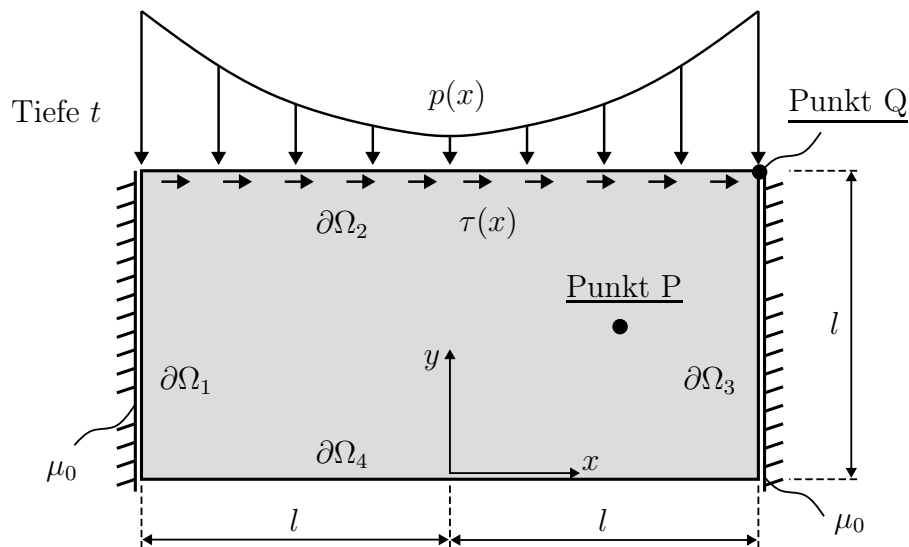
$$\text{für Dirichlet Randbedingungen:} \quad [\lambda + \mu] u_{k,ki} + \mu u_{i,jj} = 0_i$$

$$\text{für Neumann Randbedingungen:} \quad \frac{1}{1 + \nu} \sigma_{kk,ij} + \sigma_{ij,kk} = 0_{ij}$$

Ein Ansatz reicht.

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

Die unten abgebildete elastische Platte, bestehend aus einem linear-elastischen, isotropen Material (Elastizitätsmodul E , Querkontraktionszahl ν), ist zwischen den starren seitlichen Begrenzungen (Haftreibungskoeffizient μ_0) eingeklemmt und wird auf dem Rand $\partial\Omega_2$ durch den Druck $p(x)$ sowie die Schubspannung $\tau(x)$ belastet. Beide Lasten sind zunächst unbekannt. Gehen Sie zudem von einem ebenen Spannungszustand aus.



b)

Zur Beschreibung des obigen ebenen Spannungszustands ist die folgende Airy'sche Spannungsfunktion gegeben:

$$F(x, y) = \left[\frac{D_1}{l^4} x^4 + \frac{D_2}{l^2} x^2 \right] y^2 + \left[\frac{D_3}{l^5} x^4 + \frac{D_4}{l^3} x^2 \right] y^3.$$

Bestimmen Sie die daraus resultierenden Spannungskoeffizienten σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} .

Hinweis: Die Konstanten D_1 , D_2 , D_3 , D_4 müssen **nicht** bestimmt werden. (1,5 Punkte)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2 \left[\frac{D_1}{l^4} x^4 + \frac{D_2}{l^2} x^2 \right] + 6 \left[\frac{D_3}{l^5} x^4 + \frac{D_4}{l^3} x^2 \right] y \\ \sigma_{yy} &= \left[12 \frac{D_1}{l^4} x^2 + 2 \frac{D_2}{l^2} \right] y^2 + \left[12 \frac{D_3}{l^5} x^2 + 2 \frac{D_4}{l^3} \right] y^3 \\ \sigma_{xy} &= -2 \left[4 \frac{D_1}{l^4} x^3 + 2 \frac{D_2}{l^2} x \right] y - 3 \left[4 \frac{D_3}{l^5} x^3 + 2 \frac{D_4}{l^3} x \right] y^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

c)

Für eine andere Airy'schen Spannungsfunktion wurden die Koeffizienten des ebenen Spannungstensors bereits zu

$$\sigma_{xx} = 6 \frac{C_1}{l^5} x^4 y, \quad \sigma_{yy} = 12 \frac{C_1}{l^5} x^2 y^3, \quad \sigma_{xy} = -12 \frac{C_1}{l^5} x^3 y^2,$$

bestimmt, wobei C_1 eine Konstante darstellt.

An dem Punkt P mit den Koordinaten $x = l/2$, $y = l/2$ wurde mithilfe eines in y -Richtung ausgerichteten Dehnungsmesstreifens die Dehnung zu $\varepsilon_{yy}(P) = -1\%$ ermittelt. Bestimmen Sie die daraus resultierende Konstante C_1 . **(1,5 Punkte)**

$$C_1 = -\frac{0.01 E}{\frac{3}{8} - \nu \frac{3}{16}}$$

Bestimmen Sie die Verläufe $p(x)$ und $\tau(x)$ auf dem Rand $\partial\Omega_2$, welche sich aus den oben vorgegebenen Spannungszustand ergeben. Geben Sie die wichtigen Zwischenschritte an. Nehmen Sie für diesen Aufgabenteil C_1 als bekannt an. **(1,5 Punkte)**

$$\begin{aligned} \tau(x) = \sigma_{xy}(x, l) &= -12 \frac{C_1}{l^3} x^3 \\ p(x) = -\sigma_{yy}(x, l) &= -12 \frac{C_1}{l^2} x^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

d)

Geben Sie nun eine Bedingung für den Haftreibungskoeffizienten μ_0 an, sodass die Platte sich im Gleichgewicht befindet. Es gilt weiterhin der in **Aufgabenteil c)** vorgegebene Spannungszustand. Geben Sie die wichtigen Zwischenschritte an. **(2,5 Punkte)**

$$N = -t \int_0^l \sigma_{xx}(-l, y) \, dy = -3 C_1 t l$$

$$H = -t \int_0^l \sigma_{xy}(-l, y) \, dy = -4 C_1 t l$$

$$H \leq \mu N \quad \Rightarrow \quad \mu \geq \frac{4}{3}$$